Komplex függvénytan ZH, 2023. november 17.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

1. Írd fel az összes olyan $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az

$$f(x+yi) = (x^3y - xy^3) + v(x,y)i$$

függvény holomorf.

2. Legyen $A > 0$ valós szám. Számítsd ki $\left|\operatorname{ctg} z\right|$ maximumát az $\frac{\pi}{2} + Ai$, $-\frac{\pi}{2} + Ai$, $-\frac{\pi}{2} - Ai$, $\frac{\pi}{2} - Ai$ csúcsú téglalap kerületén.

3.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z = ? \quad (n \in \mathbb{Z}, \text{ negatív is lehet!})$$

4. Írd fel az $f(z) = \dfrac{4}{(z+1)(z-3)}$ függvénynek azt az i körüli Laurent-sorát, amely a $z = 2$ pontban konvergens. Milyen halmazon állítja elő a függvényt ez a Laurent-sor?

5. Legyen $D = \{z : |z| > 1\}$ és $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Bizonyítsd be, hogy ha bármely g egészfüggvényre az $f \cdot g$ függvénynek létezik primitív függvénye D-n, akkor f folytatható a teljes $\mathbb{C}$-re, vagyis van olyan F egészfüggvény, amelyre $F|_D = f$.

6. Differenciálható-e 0-ban az

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z} & \text{ha } z \neq k\pi \\ 0 & \text{ha } z = k\pi \end{cases}$$

függvény?

7. Igazold, hogy ha $f(z)$ nem konstans egészfüggvény, akkor az egységkörvonalon legfeljebb véges sok olyan pont van, ahol $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

Komplex függvénytan ZH, 2023. november 17.

Megoldások

1. Írd fel az összes olyan $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az

$$f(x+yi) = (x^3y - xy^3) + v(x,y)i$$

függvény holomorf.

Megoldás: A Cauchy–Riemann egyenletek szerint v differenciálható, és

$$v_x = -u_y = -x^3 + 3xy^2, \qquad v_y = u_x = 3x^2y - y^3$$

Ebből ki is találhatjuk, hogy $v(x,y) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + C$, de ki is számolhatjuk: ha $C = v(0,0)$, akkor

$$\begin{aligned} v(x,y) &= v(0,0) + \big(v(x,0) - v(0,0)\big) + \big(v(x,y) - v(x,0)\big) = \\ &= C + \int_{\xi=0}^{x} v_x(\xi,0)\mathrm{d}\xi + \int_{\eta=0}^{y} v_y(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta = \\ &= C + \int_{\xi=0}^{x} \big(-\xi^3\big)\mathrm{d}\xi + \int_{\eta=0}^{y} \big(3x^2\eta - \eta^3\big)\,\mathrm{d}\eta = \\ &= C - \frac{1}{4}x^4 + \left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4\right). \end{aligned}$$

Találgatás esetén elég azt ellenőrizni, hogy ar $r(x,y) = v(x,y) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$ függvény parciális deriváltjai nullák, így $r(x,y)$ konstans.

A kapott függvény

$$f(x+yi) = (x^3y - xy^3) + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}y^4 + C\right)i = -\frac{i}{4}(x+yi)^4 + C$$

avagy $f(z) = \frac{1}{4}z^4 + C$, ami tényleg egészfüggvény, mert polinom.

2. Legyen $A > 0$ valós szám. Számítsd ki $\big|\operatorname{ctg} z\big|$ maximumát az $\dfrac{\pi}{2} + Ai$, $-\dfrac{\pi}{2} + Ai$, $-\dfrac{\pi}{2} - Ai$, $\dfrac{\pi}{2} - Ai$ csúcsú téglalap kerületén.

Megoldás:

$$\operatorname{ctg} z = -i\frac{1 + e^{2iz}}{1 - e^{2iz}}.$$

A függőleges oldalakon $\operatorname{Im}(2iz) = \pm\pi$, ezért e^{2iz} negatív valós szám, így $|1 + e^{2iz}| < |1 - e^{2iz}|$, ezért

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|1 + e^{2iz}|}{|1 - e^{2iz}|} < 1.$$

A felső vízszintes oldalon $|e^{2iz}| = e^{\operatorname{Re}(2iz)} = e^{-2A} < 1$, így

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|1 + e^{2iz}|}{|1 - e^{2iz}|} \le \frac{1 + |e^{2iz}|}{1 - |e^{2iz}|} = \frac{1 + e^{-2A}}{1 - e^{-2A}}.$$

A $z = Ai$ pontban $e^{2iz} = e^{-2A}$, ezért a becslésben egyenlőség van.

Az alsó oldalon $|e^{2iz}| = e^{\mathrm{Re}(2iz)} = e^{2A} > 1$, így

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|1-e^{-2iz}|}{|1+e^{-2iz}|} \le \frac{|e^{-2iz}|+1}{|e^{-2iz}|-1} = \frac{e^{2A}+1}{e^{-2A}-1} = \frac{1+e^{-2A}}{1-e^{-2A}}.$$

A $z=-Ai$ pontban egyenlőség van.

Tehát, a téglalap kerületén $\max|\operatorname{ctg} z| = \dfrac{1+e^{-2A}}{1-e^{-2A}}$.

3.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z = ? \quad (n\in\mathbb{Z},\ \text{negatív is lehet!})$$

Megoldás: Ha $n=0$, akkor a konstans vonalintegrája zárt görbén 0.

Ha $n>0$, akkor az $(n-1)$-edik deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}\mathrm{d}z = \frac{\left((z+1)^n\right)^{(n-1)}\Big|_{z=1}}{(n-1)!} = \frac{n!\cdot 2^1}{(n-1)!} = 2n.$$

Ha $n=-k<0$, akkor a $(k-1)$-edik deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{(z-1)^k}{(z+1)^k}\mathrm{d}z = \frac{\left((z-1)^k\right)^{(k-1)}\Big|_{z=-1}}{(k-1)!} = \frac{k!\cdot(-2)^1}{(k-1)!} = -2k = 2n.$$

Tehát, minden n-re

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z = 2n.$$

4. Írd fel az $f(z) = \dfrac{4}{(z+1)(z-3)}$ függvénynek azt az i körüli Laurent-sorát, amely a $z=2$ pontban konvergens. Milyen halmazon állítja elő a függvényt ez a Laurent-sor?

Megoldás: A függvénynek a (-1)-ben és a 3-ban pólusa van, ezért a maximális i középpontú, a 2-t tartalmazó körgyűrű, ahol a függvény holomorf, a $\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{10}$.

Parciális törtekre bontás és átírás $(z-i)$-vel:

$$f(z) = \frac{-1}{z+1} + \frac{1}{z-3} = \frac{-1}{(z-i)+1+i} + \frac{1}{(z-i)-3+i}.$$

Az első tört nevezőjében $|z-i| > |1+i|$, a $z-i$ a nagyobb abszolút értékű tag, ezt emeljük ki, majd beírjuk a mértani sor összegképletét:

$$\frac{-1}{(z-i)+1+i} = \frac{-1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{1+i}{z-i}} = \frac{-1}{z-i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1+i}{z-i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(1+i)^k(z-i)^{-(k+1)}.$$

Ez a mértani sor akkor konvergens, ha $\left|\dfrac{1+i}{z-i}\right| < 1$, vagyis ha $|z-i| > \sqrt{2}$.

A második tört nevezőjében $|z-i| < |-3+i|$, a $-3+i$ a nagyobb abszolút értékű tag, ezt emeljük ki.

$$\frac{1}{(z-i)-3+i} = \frac{-1}{3-i} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-i}{3-i}} = \frac{-1}{3-i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{3-i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(3-i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

Ez a mértani sor akkor konvergens, ha $\left|\dfrac{z-i}{3+i}\right| < 1$, vagyis ha $|z-i| < \sqrt{10}$.

Tehát, a keresett Laurent-sor a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(1+i)^k(z-i)^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(3-i)^{k+1}}(z-i)^k,$$

ez a $\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{10}$ körgyűrűn konvergens, és ott elő is állítja a függvényt.

5. Legyen $D = \{z : |z| > 1\}$ és $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf függvény. Bizonyítsd be, hogy ha bármely g egészfüggvényre az $f \cdot g$ függvénynek létezik primitív függvénye D-n, akkor f folytatható a teljes $\mathbb{C}$-re, vagyis van olyan F egészfüggvény, amelyre $F|_D = f$.

Megoldás: Legyen az f függvény 0 körüli Laurent-sora a $|z| > 1$ végtelen körgyűrűn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy a Laurent-sor valójában hatványsor, vagyis $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$.

Bármilyen pozitív egész k-ra az az együtthatóformula szerint

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z^{-k+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} f(z) \cdot z^{k-1} \mathrm{d}z.$$

Az integrálban szereplő z^{k-1} egy egészfüggvény; a feltétel szerint tehát $f(z) \cdot z^{k-1}$-nek van primitív függvénye, így a vonalintegrál 0. Tehát, bármely k pozitív egészxre $a_{-k} = 0$.

6. Differenciálható-e 0-ban az

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z} & \text{ha } z \neq k\pi \\ 0 & \text{ha } z = k\pi \end{cases}$$

függvény?

Megoldás: A megszüntethető szingularitások jellemzése miatt ha

$$\lim_{z \to 0} f(z) \cdot z = 0,$$

akkor a 0-beli szingularitás megszüntethető. És valóban,

$$\lim_{z \to 0} f(z) \cdot z = \lim_{z \to 0} \left(\frac{z}{\sin z} - 1\right) = 1 - 1 = 0.$$

A $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ határérték tehát létezik. Mivel a függvény páratlan, a 0-beli határérték csak a 0 lehet, tehát $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 0 = f(0)$; a függvény folytonos a 0-ben, de akkor holomorf is.

7. Igazold, hogy ha $f(z)$ nem konstans egészfüggvény, akkor az egységkörvonalon legfeljebb véges sok olyan pont van, ahol $\operatorname{Re} f(z) = 0$.

Megoldás: Legyen $g(z) = f(z) + \overline{f(1/\overline{z})}$, ez holomorf a $z \neq 0$ tartományon, és tegyük fel indirekten, hogy $\operatorname{Re} f$-nek végtelen sok gyöke van a körvonalon.

Az egységkörvonalon $z = 1/\overline{z}$ és emiatt

$$g(z) = f(z) + \overline{f(1/\overline{z})} = f(z) + \overline{f(z)} = 2 \operatorname{Re} f(z).$$

A feltétel szerint ez a körvonal végtelen sok pontjában 0; a gyökök torlódnak valahol a körvonalon. Az unicitástétel miatt tehát g konstans 0, vagyis a körvonal minden pontjában $\operatorname{Re} f = 0$.

A Weierstrass-tétel miatt a $\operatorname{Re} f$ függvénynek van maximuma és minimuma a zárt egységkörlemezen; legalább az egyik szélsőérték előfordul az egységkör belsejében. Akkor viszont ott $\operatorname{Re} f$-nek lokális szélsőértéke van. A gyakorlaton láttuk, hogy $\operatorname{Re} f$-nek csak akkor lehet lokális szélsőértéke, ha f konstans.