

Komplex függvénytan ZH, 2023. december 15.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

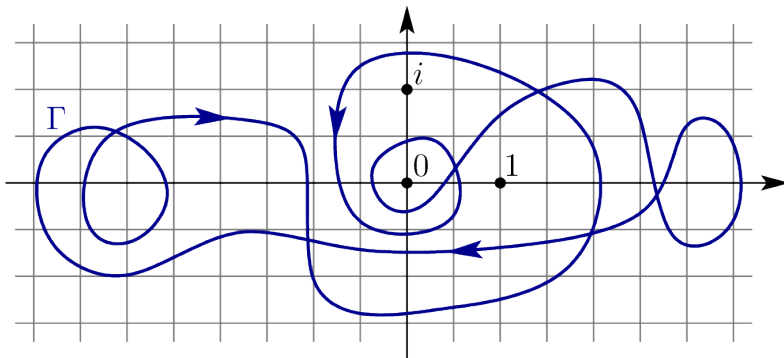
Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

1.

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z + \pi)^2 \cos z} = ?$$



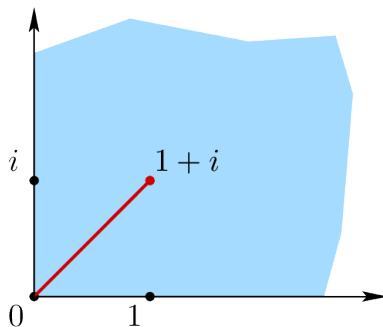
2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok!)

3. Hány gyöke van a $\cos z = 2i \cdot z^3$ egyenletnek az egységkörben?

4. Adj meg konform megfeleltetést (képletet) az ábrán látható bevágott negyedsík és az egységkör között.



5. Az $f : B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ holomorf függvény gyökei w_1, w_2, \dots (lehet végtelen sok is). Bizonyítsd be, hogy $|f(0)| \leq \prod_j |w_j|$.

6. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkör belsejében, $f(0) = 0$, és az egységkörlemez pontjaiban $\operatorname{Re} f > -1$. Igazold, hogy $\operatorname{Re} f(z) < \frac{2|z|}{1 - |z|}$.

7. Legyen $-1 < a < 1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(5 + 4 \cos t)}{1 - 2a \cos t + a^2} dt = ?$$