Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)

2022/2023, II. félév

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása, válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire. (20 perc)

A felkészüléshez 2 lap (4 oldal) A4-es méretű, saját kézzel írt jegyzet használható.

A vizsgán a tételjegyzéket és a sillabuszt is használhatjátok.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Részletes tételjegyzék

♣A 1. Green-tétel

A vonalintegrál általánosításai. Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). [LTS2, 200–204. o.]

♣2 2. Integráltételek síkban

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. Stokes-tétel 2-dimenzióban.

♣3 3. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Területelem, normálvektor, felszín. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafikon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció 3-dimenzióban. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.) [LTS2, 211–221. o.]

♣4 4. Halmazstruktúrák, Borel-halmazok

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, σ-additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$-n. Banach–Tarski paradoxon (bizonyítás nélkül); nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$-ön. Halmazrendszerek: halmazgyűrű, algebra, σ-gyűrű, σ-algebra, modulus, félgyűrű. Félgyűrűben véges és megszámlálható unió átalakítása diszjunkt halmazok uniójára. Generált struktúrák. Megszorítás. Borel-halmazok topologikus terekben. [Petruska, 51–52, 55, 81–82. o.]

♣5 5. Halmazfüggvények, mértékek

Kiterjesztett számegyenes. Halmazfüggvények. Monoton, additív σ-additív, szubadditív, σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Előjeles és komplex mértékek. Mértéktér. Számosságmérték, Dirac-mérték. A mértékek additivitása, monotonitása és folytonossága.

♣6 6. Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

♣7 7. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.

♣8 8. Teljes mértékterek

Külső mérték szerint nullmértékű halmaz. A nullmértékű halmazok mérhetőek. Teljes mértéktér. Teljes mértéktér megszorítása teljes. A Lebesgue-mérték teljes. Minden mértéktér tejessé tehető.

♣9 9. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. σ-végesség. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. Minden Jordan-mérhető és minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető. A $\mathcal{L}_p$, illetve a $\mathcal{B}$ algebrán a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásnvariáns mérték.

♣10 10. Lebesgue-Stieltjes mértékek egy dimenzióban

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték. Eloszlásfüggvény. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

♠A 11. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban.

Kiterjesztés véges dimenzióban. Eloszlásfüggvény. Addititív téglafüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték véges dimenzióban. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

♠2 12. Lokálisan véges Borel-mértékek regularitása

Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. Mérhető halmazok "távolsága". Minden véges mértékű, Lebesgue–Stieltjes mérhető halmazhoz van tetszőlegesen közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója.

♠3 13. Mérhető függvények

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció), megszámlálható sok mérhető függvény pontonkénti szuprémuma, infimuma, liminfje, limszupja, a konvergenciahalmaz mérhetősége. Luzin tétele.

♠4 14. Nemnegatív függvények integrálja

$0 \cdot \infty = 0$. Egyszerű függvények. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek.

♠5 15. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétel. A MKT. nem igaz csökkenő sorozatra. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Végtelen táblázat összege mint a BLT speciális esete. Fatou-lemma. Példák, amikor a Fatou-lemmában nincs egyenlőség, illetve limsuppal egyik irányban sem igaz. Rögzített mérhető, nemnegatív függvény integrálja mérték.

♠6 16. Valós és komplex értékű függvények integrálja

Előjeles és komplex függvények integrálja. Műveletek. Rögzített függvény integrálja, mint előjeles/-komplex mérték. Lebesgue-integrálható függvény közelítése "szép" függvényekkel.

♠7 17. Függvénysorozatok integrálja

Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum \int |f_n|$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m.

♠8 18. A Riemann-integrál létezésének feltételei

Alulról és felülről folytonos függvények. Alsó és felső burkoló. A burkolófüggvények Borel-mérhetősége. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele. A Riemann-integrálható függvények Lebesgue-mérhetősége.

♢Q 19. Előjeles mértékek variációi

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt.

♢K 20. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. Minden előjeles előáll, mint a totális variócója szerinti integrál.

♢A 21. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség.

♢2 22. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói.

♢3 23. Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Műveletek.

♢4 24. A maximális operátor tétele

A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges.

♢5 25. Borel-mértékek differenciálása

Lebesgue-pont. Lokálisan integrálható függvénynek majdnem pontja Legesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. A mértékek differenciálásnak fő tétele. Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0.

♢6 26. A sűrűségi tétel

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Az alsó és felső sűrűség megegyezik az alsó és felső szimmetrikus deriválttal. Sűrűségi pont. Sűrűségi tétel.

♢7 27. Abszolút folytonos függvények

Abszolút folytonos függvény. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és a folytonosság kapcsolata. Monoton növő függvény abszolút folytonosságának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel és Radon–Nikodym deriválttal.

♢8 28. Szinguláris függvények

Szinguláris függvény. Monoton növő függvény szingularitásának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel. Szigorúan mononton, folytonos, szingulálris függvény. Lebesgue-felbontás. Minden monoton függvény m.m. differenciálható. Fubini-tétel monoton függvények összegének tagonkénti differenciálásáról. Newton–Leibniz formula.

♢9 29. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata.

♢10 30. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra.

♡A 31. L_p-terek

L_p-normák. Konjugált kitevők, Hölder-, Cauchy–Schwarz és Minkowski-egyenlőtlenség. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben $p < \infty$ esetén sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinátájú tégalapon racionális konstans függvények. Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$.

♡2 32. Riesz–Fischer tétel

Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.)

♡3 33. Mértékben való konvergencia

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség.

♡4 34. L_2-terek, ortogonális függvénysorok

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Az $L_2([a, b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. (Petruska II, 24. fej.)

♡5 35. L_1-függvények konvolúciója

Példák konvolúcióra (kép, hang, hatványsorok, Fourier-sorok részletösszegei). $L_1(\mathbb{R}^p)$-beli függvények konvolúciója. Műveletek. L_1 mint kommutatív Banach-algebra.

♡6 36. L_1-függvények Fourier-transzformáltja

Fourier-transzformált. L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. A Fourier-transzformált homomorfizmus az $(L_1, *)$ és $(L_\infty, \cdot)$ Banach-algebrák között. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja.

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

[Halász] Halász Gábor: Fourier integrál. Egyetemi jegyzet, ELTE, 2005.

[Friedmann] H. Friedman: A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. Illinois J. Math., 24 (3): 390–395, MR 0573474