Analízis 4 jegyzet, 2023

Kós Géza

(Utolsó módosítás: 2023. április 8., 21:25)

I. rész

Integráltételek

1. előadás, 2023.02.28.

Az *integráltételek* olyan azonosságok egy széles gyűjteménye, amikor egy függvény valamilyen deriváltját integráljuk egy térbeli halmazon, és ezt a határon (tehát eggyel kisebb dimenziós halmazon) vett integrállal hasonlítjuk össze.

A legegyszerűbb integráltétel az egyváltozós Newton–Leibniz formula:

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x}_{f' \text{ integrálja a halmazon}} = \underbrace{f(b) - f(a)}_{f \text{ összege/integrálja a határon}}$$

... amikor egy függvénynek egy intervallumon vett integrálját a primitív függvénynek a végpontokban vett értékeivel – ha tetszik, integráljával – fejezzük ki. Ezért ezek a tételek a Newton–Leibniz formula általánosításai.

Integráltételek sokféle halmazon léteznek: görbék, feületdarabok, Jordan-mérhető halmazok. Ezeknek a határa is sokféle lehet.

Integrálból és deriváltból is sokféle létezik: Riemann-integrál, vonalintegrálok, felületi integrálok...

1. A Green-tétel

A vonalintegrál általánosításai. Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). [LTS2, 200–204. o.]

Az integráltételeinkben nem csak az eddig megismert valós vonalintegrálokra lesz szükségünk; a skaláris szorzás helyett használni fogjuk vektor és skalár szorzatát, a 3-dimenziós vektoriális és a komplex szorzást is, ezért az eddigi valós vonalintegrálfogalmunkat kiterjesztjük mindenféle, vektor- és skalárértékű szorzásra. Másfelől, mindig folytonos függvényeket fogunk integrálni, és mindig szakaszonként C^1 görbéken, ezért az általános definíciót leszűkíthetjük.

Definíció (általános vonalintegrál szakaszonként C^1 görbén)

Legyen

- $G \subset \mathbb{R}^p$ összefüggő, nyílt, $\gamma : [a,b] \to G$ szakaszonként C^1 görbe;
- $f : G \to \mathbb{R}^q$ folytonos függvény;
- $* : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ bilineáris függvény, valamilyen szorzás.

Ekkor az $\int_\gamma f(\mathbf{x}) * \mathrm{d}\mathbf{x}$ vonalintegrált a következőképpen definiáljuk:

$$\int_\gamma f(\mathbf{x}) * \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{t=a}^{b} \Big(f\big(\gamma(t)\big) * \dot\gamma(t) \Big) \mathrm{d}t.$$

Ha $r > 1$, akkor az integrandus és integrál értéke is r-dimenziós vektor; minden szinten a szorzat megfelelő koordinátáját kell integrálni:

$$\int_\gamma f(\mathbf{x}) * \mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \int_{t=a}^{b} \Big(f\big(\gamma(t)\big) * \dot\gamma(t) \Big)_1 \mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_{t=a}^{b} \Big(f\big(\gamma(t)\big) * \dot\gamma(t) \Big)_r \mathrm{d}t. \end{pmatrix}$$

Példák

- Ha $p = q = r = 1$, $\gamma(t) = t$ és $*$ a valós számok szorzása, akkor ez éppen az egyváltozós Riemann-integrál.
- Ha $p = q$ és $r = 1$, és $*$ a vektorok skaláris szorzása, akkor ez a valós vonalintegrál.
- Ha $p = q = r = 2$, és $*$ a komplex szorzás, akkor a neve az f *komplex vonalintegrálja* a γ görbén.
- Ha $q = r = 1$ és $1 \leqslant i \leqslant p$, akkor az f függvénynek az x_i változó szerinti vonalintegrálja a γ görbén $\int_\gamma f(x)\mathrm{d}\mathbf{x}_i = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma_i(t)\,\mathrm{d}t$.

Megjegyzés

Mindegyik vonalintegrált átírhatjuk az egyes változók szerinti vonalintegrálok egy lineáris kombinációjára.

- Valós vonalintegrál:

$$\int_\gamma \left\langle f(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \int_\gamma f_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_i$$

- Komplex vonalintegrál:

$$\int_\gamma f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_\gamma f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 - \int_\gamma f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 \\ \displaystyle\int_\gamma f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1 + \int_\gamma f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_2 \end{pmatrix}$$

Példa

Számítsuk ki az $f(z) = \overline{z}$ függvény komplex vonalintegrálját az egységkörvonalon.

Megoldás.

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi); \quad x(t) = \gamma_1(t) = \cos t, \quad y(t) = \gamma_2(t) = \sin t$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t); \quad \mathrm{d}x = \dot{\gamma}_1(t)\,\mathrm{d}t = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \dot{\gamma}_2(t)\,\mathrm{d}t = \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$f(x,y) = (x, -y)$$

$$\int_\gamma f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x = \int_\gamma x\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{2\pi} \cos t \cdot (-\sin t)\,\mathrm{d}t = 0;$$

$$\int_\gamma f_1(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{2\pi} \cos t \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \pi;$$

$$\int_\gamma f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x = \int_\gamma (-y)\,\mathrm{d}x = \int_{t=0}^{2\pi} (-\sin t) \cdot (-\sin t)\,\mathrm{d}t = \pi;$$

$$\int_\gamma f_2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}y = \int_\gamma (-y)\,\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{2\pi} (-\sin t) \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = 0;$$

$$\int_\gamma f(x,y) * (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_\gamma (f_1, f_2) * (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_\gamma \big(f_1\,\mathrm{d}x - f_2\,\mathrm{d}y; f_1\,\mathrm{d}y + f_2\,\mathrm{d}x\big)$$

$$= \left(\int_\gamma f_1\,\mathrm{d}x - \int_\gamma f_2\,\mathrm{d}y; \int_\gamma f_1\,\mathrm{d}y + \int_\gamma f_2\,\mathrm{d}x \right) = \big(0 - 0; \pi + \pi\big) = (0, 2\pi).$$

Avagy,

$$\int_\gamma \overline{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

"Keresztszorzat"

A síkbeli integráltételekhez használni fogjuk a vektoriális szorzat kétdimenziós változatát:

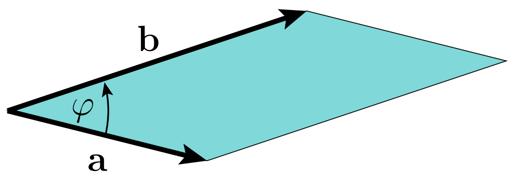
Definíció

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ síkvektorok *keresztszorzata*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},$$

irányított szöge az a $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ szög, amelyre

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



Megjegyzés

Síkvektoroknak most már legalább háromféle szorzatát ismerjük: a skaláris szorzás és a keresztszorzat bilineáris $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, a komplex szorzás pedig tekinthető bilineáris $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvénynek.

Görbeindex, Jordan-féle görbetétel

Definíció

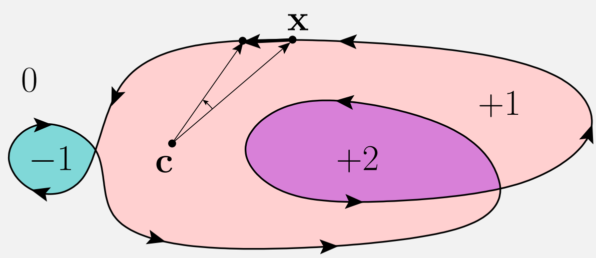
Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zárt görbe, és a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ pont nincs rajta a görbén, akkor $n(\gamma, \mathbf{c}) \in \mathbb{Z}$ jelenti azt, hogy a γ előjelesen hányszor "kerüli meg" a c pontot. Neve: a görbe **c**-*re vonatkozó indexe*, vagy **c** *körüli körülfordulási száma*. A görbeindexet sokféle paraméteres vonalintegrállal is felírhatjuk, például

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{(x,y)\in\gamma} \left\langle \underbrace{\left(\frac{-(y - c_2)}{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}, \frac{x - c_1}{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} \right)}_{\operatorname{grad} \text{szög}(\mathbf{x}-\mathbf{c})} ; (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2} \times \mathrm{d}\mathbf{x}$$

vagy komplex vonalintegrállal

$$n(\gamma, \mathbf{c}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{z}\in\gamma} \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathbf{z} - \mathbf{c}}.$$



A görbeindex mindig egész szám.

Definíció (Jordan-görbe (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838–1922))

A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ görbe *Jordan-görbe*, ha *egyszerű*, *zárt*, vagyis folytonos, $\gamma(a) = \gamma(b)$, és a két végpont kivételével injektív (pl. az $[a, b)$ intervallumra megszorítva injektív.)

Tétel (Jordan-féle görbetétel)

Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt görbe, akkor az $\mathbb{R}^2 \backslash \gamma\big([a, b]\big)$ nyílt halmaz két összefüggő komponensből áll, az egyik komponens korlátos (a görbe *belseje*), a másik komponens nem korlátos (a görbe *külseje*), és mindkét komponens határa a γ.
A görbe külső pontokra vonatkozó indexe 0, a belső pontokra vonatkozó index vagy mindenhol $+1$, vagy mindenhol -1. Az első esetben a görbét *pozitív irányításúnak*, a második esetben *negatív irányításúnak* nevezzük.

(Erdős Pálnak az a mondása, hogy valaki *a Jordan-tételt tanulmányozza*, azt jelentette: az illető börtönben van.)

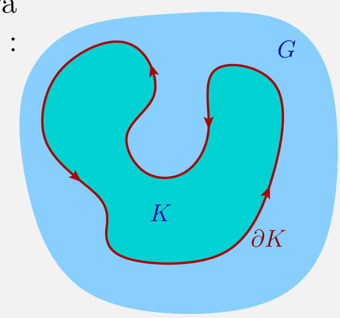
Definíció

$K \subset \mathbb{R}^2$ *Jordan-tartomány*, ha egy egyszerű, zárt, folytonos görbe belseje.
A továbbiakban a határgörbét, mindig pozitív irányítással, ∂K fogja jelölni.

Green tétele

Tétel (Green (George Green, 1793–1841))

Legyen K Jordan-tartomány, amelynek a határa szakaszonként C^1, legyen $G \supset \operatorname{cl} K$ nyílt, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható.



(a) Ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

$$\int_{\partial K} f \mathrm{d}y = \int_K \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(b) Ha $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ létezik és folytonos $\operatorname{cl} K$-n, akkor

$$\int_{\partial K} f \mathrm{d}x = -\int_K \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(a+b) együtt: Ha f és g folytonosan differenciálható $\operatorname{cl} K$-n, akkor

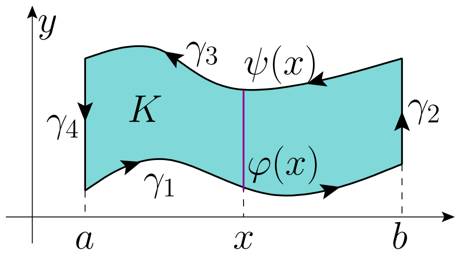
$$\int_{\partial K} (f \mathrm{d}x + g \mathrm{d}y) = \int_K \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Bizonyítás. (b1). Ha K normáltartomány: a bizonyítás lényege, hogy K minden függőleges szekcióján alkalmazzuk az egyváltozós Newton-Leibniz formulát.

Tegyük fel, hogy

$$K = \{(x, y) : x \in [a, b], \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

valamilyen $[a, b]$ intervallummal és szakaszonként differenciálható $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \leqslant \psi$ függvényekkel. A két függvénygrafikon tehát $(x, \varphi(x))$ és $(x, \psi(x))$.



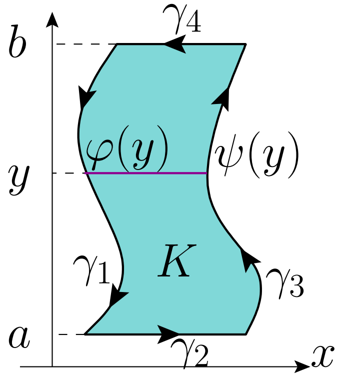
A ∂K határ négy részre vágható: a felső és az alsó határoló grafikon γ_1 és γ_3, és két függőleges szakasz γ_2 és γ_4. A felső függvénygrafikonon jobbról balra kell végigmennünk.

A függőleges szakaszokon az x szerinti vonalintegrál 0.

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \Big(f(x, \psi(x)) - f(x, \varphi(x)) \Big) \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\gamma_1} f \mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} f \mathrm{d}x = -\int_{\partial K} f \mathrm{d}x.$$

(a1) Ha K egy tükrözött mormáltartmány, akkor hasonlóan bizonyítunk, az x és y felcserélésével. Ez a tükrözés megfordítja a határ irányítását, ezért azt vissza kell fordítanunk; itt jön be még egy negatív előjel.



$$\int_K \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=a}^{b} \left(\int_{x=\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{y=a}^{b} \Big(f(y, \psi(y)) - f(y, \varphi(y)) \Big) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{\gamma_3} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial K} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Általában:

- A fentiek bizonyítanak például konvex sokszögekre.
- Átlókkal vagy akár párhuzamos szakaszokkal szétvágva-összeragasztva megkapjuk az állítást tetszőleges zárt töröttvonalra.
- Az általános esetben a határgörbét belülről közelítjük töröttvonalakkal, majd határátmenet.

Következmény (Jordan-tartomány területe)

Ha K Jordan-tartomány, a határa szakaszonként C^1, akkor

$$t(K) = \int_{\partial K} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial K} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial K} \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Bizonyítás. Green-tétel az $f(x,y) = x$, illetve $f(x,y) = -y$ függvényekre vagy a kettő összegére:

$$\int_{\partial K} x\mathrm{d}y = \int_K \frac{\partial x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = t(K).$$

$$-\int_{\partial K} y\mathrm{d}x = \int_K \frac{\partial y}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_K 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = t(K).$$

Példa

Próbáljuk ki a fenti területképletet az origó középpontú, r sugarú körre.

A határgörbe:

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi), \qquad \mathrm{d}\mathbf{x} = \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = (-r\sin t, r\cos t)\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned} t\big(B(0,r)\big) &= \frac{1}{2}\int_{\partial K} \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} (r\cos t, r\sin t) \times (-r\sin t, r\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} r^2\,\mathrm{d}t = r^2\pi. \end{aligned}$$

Következmény

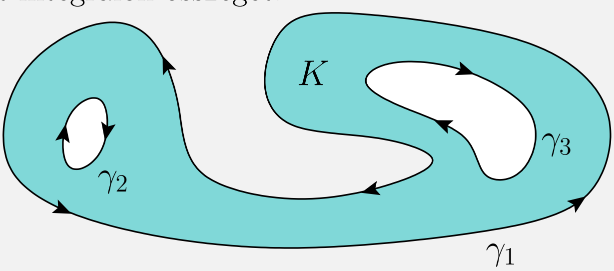
Szakaszonként C^1 Jordan-görbén, aminek a belsejében rotációmentes egy vektormező, a vonalintegrál 0.

Bizonyítás. Ezt már megcsináltuk sokkal általánosabban a Goursat-lemmával, de a Green-tétel is működik:

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \langle f, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle &= \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}x + \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}y = \\ &= -\int_K \frac{\partial f_1}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_K \frac{\partial f_2}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &= \int_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$

Megjegyzés

A fentiek elmondhatók olyan tartományokra is, amelyeket egynél több zárt görbe határol, ha a görbéket megfelelően irányítjuk. Legyen $K \subset G$ olyan halmaz, amelynek határa véges sok, diszjunkt, egyszerű zárt, szakaszonként C^1 görbéből áll (a továbbiakban: krumpli), akkor K határgörbéit lehetséges úgy irányítani, hogy az K külső pontjaikra vonatkozó indexe 0, a belső pontokra az indexösszeg $+1$ legyen. A továbbiakban ∂K (a krumpli héja) ezeknek az irányított határgörbéknek a halmazát fogja jelenteni, és az $\int_{\partial K}$ a görbéken vett integrálok összegét.



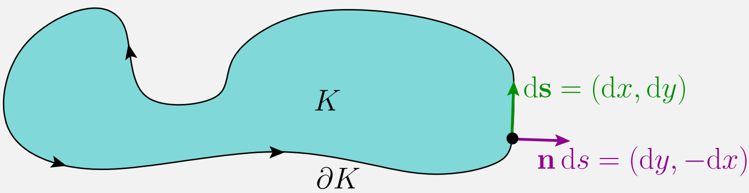
Az összeragasztós-approximálós módszer ezekre is működik, így a Green-tétel és fenti következményei az ilyenekre is kiterjeszthetők.

2. Integráltételek síkban

2. előadás, 2023.03.02.

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. Stokes-tétel 2-dimenzióban.

Definíció



A $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ szakaszonként C^1 görbe *sebességvektora* a t időpontban $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix}$. Ha ez nem a nullvektor, akkor az *érintővektor* $\mathbf{t} = \dfrac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \dfrac{(\dot x, \dot y)}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$. Ennek $(-90°)$-kal elforgatottja a *külső normális*: $\mathbf{n} = \dfrac{(\dot y, -\dot x)}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}$. Az ívhossz szerinti integráloknál használni fogjuk a $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}\mathbf{x}$ és a $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{x}|$, a terület szerinti integráloknál az $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ jelöléseket. A szokásos helyettesítésekkel a görbén

$$\mathbf{t}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \mathrm{d}y \\ -\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

Tétel (Newton–Leibniz formula (Isaac Newton, 1642–1727; Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716))

Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\,\mathrm{d}A = \int_{\partial K} f\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Bizonyítás.

$$\int_{\partial K} f\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\partial K} f\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}y\\ -\mathrm{d}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_{\partial K} f\mathrm{d}y\\ -\int_{\partial K} f\mathrm{d}x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\int_K D_x f\,\mathrm{d}A\\ \int_K D_y f\,\mathrm{d}A\end{pmatrix} = \int_K (\mathrm{grad}\, f)\,\mathrm{d}A.$$

Megjegyzés

Elmondhatjuk ugyanezt egydimenzióban, egy $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvényre. A határ két, egységnyi súlyú pontból áll: a felső végpontban a "kifelé mutató normálvektor" a $+1$, az alsó végpontban -1. Ezért $\int_{[a,b]} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\cdot(-1)+f(b)\cdot(+1)$.

Példa

A Newton–Leibniz formula segítségével írjunk fel olyan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy bármely, szakaszonként differenciálható határú K krumpli súlypontja

$$S = \frac{\int_{\partial K} f(\mathbf{x})\,\mathbf{n}\mathrm{d}s}{t(K)}.$$

Megoldás. A súlypont a pontok terület szerinti átlaga:

$$S = \frac{\int_K \mathbf{x}\,\mathrm{d}A}{t(K)}.$$

Az kellene, hogy

$$\forall K \qquad \int_{\partial K} f(\mathbf{x})\,\mathbf{n}\mathrm{d}s = \int_K \mathbf{x}\,\mathrm{d}A.$$

A Newton–Leibniz formula szerint

$$\int_{\partial K} f(\mathbf{x})\,\mathbf{n}\mathrm{d}s = \int_K \big(\mathrm{grad}\, f(\mathbf{x})\big)\,\mathrm{d}A,$$

tehát minden szép és jó, ha

$$\big(D_1 f(x,y), D_2 f(x,y)\big) = \mathrm{grad}\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = (x,y).$$

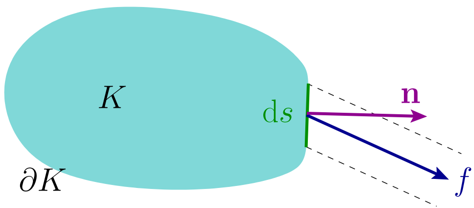
Például

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 \quad \text{egy jó függvény.}$$

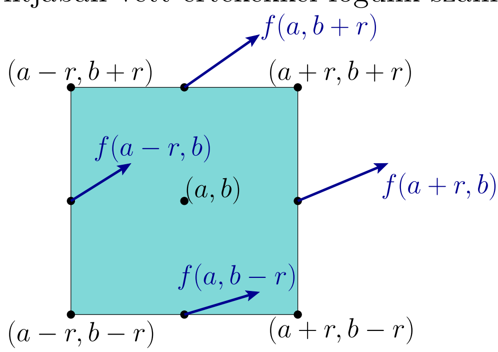
A talajvíz forráserőssége és forrássűrűsége

Kertünk, K egy talajvízzel elárasztott G területen fekszik, a vízszint állandó. A terület bármely pontján a talajvíz feltörhet vagy elszivároghat, de a feltörő víz a ∂K keritésen keresztül kiáramlik, illetve az elszivárgó vízmennyiség a kerítésen keresztül áramlik be. A víz tehát folyamatos mozgásban van, a sebességét az $f : G \to \mathbb{R}^2$ vektormező adja meg.

A kertből a kerítésen át másodpercenként kifolyó vízmennyiség a kertünk *forráserőssége*. Egy $\mathrm{d}s$ hosszú kerítésdarabon, amelynek kifelé mutató normálvektora $\mathbf{n}$, másodpercenként $\langle f, \mathbf{n}\,\mathrm{d}s\rangle$ víz folyik ki; a forráserősség ennek integrálja, vagyis $\int_{\partial K}\langle f, \mathbf{n}\,\mathrm{d}s\rangle$.



Most osszuk fel kertünket kis, $2r$ oldalú négyzetekre, és vizsgáljunk meg, hogy egy (a, b) pont körüli $[a - r, a + r] \times [b - r, b + r]$ négyzetben mennyi víz tör fel, illetve mennyi folyik a négyzetből ki. Az f persze egy-egy oldalon sem állandó, mi az oldalak középpontjában vett értékekkel fogunk számolni.



A függőleges oldalakon kifolyó vízmennyiség csak f vízszintes komponensétől függ, a vízszintes oldalakon pedig az f függőleges komponensétől.

- A jobboldalon kifolyó vízmennyiség: $f_1(a + r, b) \cdot 2r$
- Baloldalon: $-f_1(a - r, b) \cdot 2r$ (a negatív irány mutat kifelé)
- Fent: $f_2(a, b + r) \cdot 2r$
- Lent: $-f_2(a, b - r) \cdot 2r$ (a negatív irány mutat kifelé)

Összeadva, a négyzet forráserőssége

$$\begin{aligned}
&\approx f_1(a+r,b)\cdot 2r - f_1(a-r,b)\cdot 2r + f_2(a,b+r)\cdot 2r - f_2(a,b-r)\cdot 2r\\
&= \left(\frac{f_1(a+r,b)-f_1(a-r,b)}{2r} + \frac{f_2(a,b+r)-f_2(a,b-r)}{2r}\right)\cdot (2r)^2\\
&\approx \big(D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)\big)\cdot \text{terület}.
\end{aligned}$$

Mondhatjuk, hogy az (a,b) pont körül négyzetméterenként és másodpercenként $D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)$ egységnyi talajvíz tör fel. A *forrássűrűség az (a,b) pontban: $D_1 f_1(a,b) + D_2 f_2(a,b)$*.

A kertben másodpercenként feltörő összes vízmennyiség, vagyis a kert forráserőssége a forrássűrűség terület szerinti integrálja, vagyis $\int_K (D_1 f_1 + D_2 f_2)\mathrm{d}A$.

Ezzel kétféle heurisztikus képletet is kitaláltunk a kertből kifolyó vízmennyiségre, és azt várjuk, hogy a kettő valóban egyenlő, és persze nem függ az önkényesen megválasztott koordináta irányainktól sem:

$$\int_K (D_1 f_1 + D_2 f_2)\,\mathrm{d}A \overset{?}{=} \int_{\partial K} \langle f, \mathbf{n}\,\mathrm{d}s\rangle.$$

Definíció (vektormező divergenciája)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható. Az $\mathbf{f}$ vektormező *divergenciája* vagy *forrássűrűsége*

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = D_1 f_1 + D_2 f_2 + \ldots + D_p f_p = \operatorname{tr} J_f.$$

A $\nabla = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_p \end{pmatrix}$ jelöléssel, alternatív felírások:

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \langle \nabla, f\rangle = \operatorname{tr} f' = \nabla^t \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$$

Tétel

A divergencia nem függ a koordinátarendszer irányától.

Bizonyítás. Általában, mi történik, ha a szokásos koordináta-rendszerről a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ koordináta-egységvektorokra térünk át? Az új koordináta vektorokból egy $T = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ mátrixot készíthetünk, ami ortogonális (azaz $T^tT = TT^t = I$ avagy $T^{-1} = T^t$), és pozitív irányítású (azaz $\det T = 1$). Ha egy vektor koordinátái a régi rendszerben $\mathbf{x}$, az új rendszerben $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{y} = T^t\mathbf{x}$.

A T transzformáció megtartja a skaláris szorzatot: tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorokra

$$\langle T^t\mathbf{x}, T^t\mathbf{y}\rangle = (T^t\mathbf{x})^t(T^t\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t(TT^t)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

Az $\mathbf{u}_i$ irányú iránymenti derivált $D_{\mathbf{u}_i} = \mathbf{u}_i^t\nabla$; az új rendszerben a deriváló operátor

$$\nabla_{\text{új}} = \begin{pmatrix} D_{\mathbf{u}_1} \\ \vdots \\ D_{\mathbf{u}_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_p^t \end{pmatrix} \nabla = T^t\nabla.$$

Avagy, skalármező gradiensvektora az új koordináta-rendszerben

$$\operatorname{grad}_{\text{új}} f = T^t \operatorname{grad}_{\text{régi}} f.$$

A vektormezőket is az új koordináta-rendszerben írjuk fel, tehát $\nabla_{\text{új}}$-t nem az $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ függvényre, hanem az $\mathbf{f}_{\text{új}} = T^t\mathbf{f}$ fügvényre kell alkalmaznunk.

Tehát

$$\operatorname{div}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}} = \nabla_{\text{új}}^t \mathbf{f}_{\text{új}} = (\nabla^t T)(T^t\mathbf{f}) = \nabla^t(TT^t)\mathbf{f} = \nabla^t\mathbf{f} = \operatorname{div}\mathbf{f}.$$

Tétel (2-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel (Carl Friedrich Gauß, 1777–1855; Михаил Васильевич Остроградский, 1801–1862))

Ha $\operatorname{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor

$$\int_K (\operatorname{div}\mathbf{f})\, \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n}\mathrm{d}s\rangle.$$

Bizonyítás.

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n}\mathrm{d}s\rangle = \int_{\partial K} \big(f_1\mathrm{d}y + f_2(-\mathrm{d}x)\big) = \int_{\partial K} f_1\mathrm{d}y - \int_{\partial K} f_2\mathrm{d}x =$$
$$= \int_K (D_1f_1)\mathrm{d}A + \int_K (D_2f_2)\mathrm{d}A = \int_K (\operatorname{div}\mathbf{f})\, \mathrm{d}A.$$

Megjegyzés

A Gauss-Osztrogradszkij tétel lehetőséget ad a divergencia egy koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal:

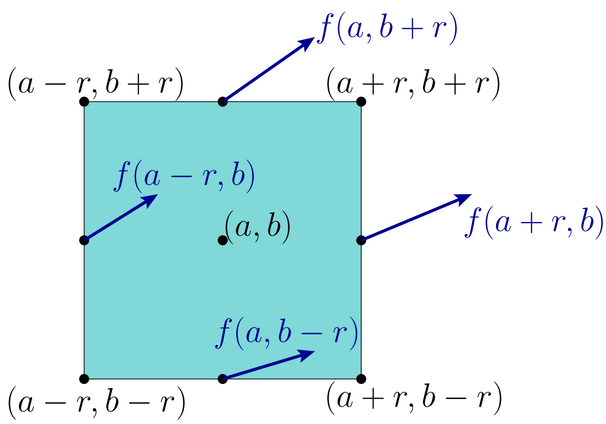
$$\operatorname{div} f(\mathbf{a}) = \lim_{r\to+0}\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=r}\big\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{n}\mathrm{d}s\big\rangle\right).$$

Vektormező örvényerőssége és örvénysűrűsége

Kertünkben most az örvénylést fogjuk mérni. Csónakunkra a kert minden pontjában valamekkora f erő hat a víz sodrása miatt. A kert határán az *örvényerősség* azt jelenti, hogy pozitív irányban körbe haladva a sodrás mekkora munkát végez. Ezt persze a szokásos valós vonalintegrál adja meg: $W = \int_{\partial K}\langle f, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle = \int_{\partial K}(f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y)$.

Ismét osszuk fel kertünket kis, $2r$ oldalú négyzetekre, és vizsgáljunk meg az örvényerősséget az (a,b) pont körüli $[a-r,a+r]\times[b-r,b+r]$ négyzet határán. Ismét csak az oldalközéppontokban vett erőkkel számolva, a végzett munka a jobb-, a bal-, a felső és az alsó oldalon rendre $f_2(a+r,b)\cdot 2r$, $f_2(a-r,b)\cdot(-2r)$, $f_1(a,b+r)\cdot(-2r)$, illetve $f_1(a,b-r)\cdot 2r$, összesen

$$\big(f_2(a+r,b)-f_2(a-r,b)-f_1(a,b+r)+f_1(a,b-r)\big)\cdot 2r \approx \big(D_1f_2-D_2f_1\big)\cdot(2r)^2.$$



Ha ezt az összes kis négyzetre összeadjuk, akkor a belső határokon vett munkák kiesnek, és csak a kert határa mentén végzett munka marad meg. Tehát azt várjuk, hogy $W = \int_K \big(D_1f_2 - D_2f_1\big)\mathrm{d}A$. Az integrandust, a $D_1f_2 - D_2f_1$ függvényt nevezhetjük az f vektormező *örvénysűrűségének*.

Definíció (vektormező rotációja 2-dimenzióban)

Két dimenzióban az f vektormező *rotációja* vagy *örvénysűrűsége*

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} = D_1 f_2 - D_2 f_1 = \nabla \times f = \det(\nabla, \mathbf{f})$$

Angol nyelvű tankönyvekben, cikkekben a rotációt *curl*nek nevezik, és curl $\mathbf{f}$-fel jelölik.

Tétel

A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.

Bizonyítás. Blokkmátrixokkal

$\operatorname{rot}_{\text{új}}\mathbf{f}_{\text{új}} = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}) = \det(T^t\nabla, T^t\mathbf{f}) = \det\left(T^t\cdot(\nabla, \mathbf{f})\right) = \det T^t\cdot\det(\nabla, \mathbf{f})\big) = 1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}.$

Tétel (2-dimenziós Stokes-tétel (George Gabriel Stokes, 1819–1903))

Ha $\mathrm{cl}(K) \subset G \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-tartomány, aminek a határa pozitív irányítású, szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor

$$\int_K (\operatorname{rot}\mathbf{f})\, \mathrm{d}A = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times (\mathbf{n}\mathrm{d}s).$$

Bizonyítás. A második két integrál ugyanaz, mert

$$-\mathbf{f} \times (\mathbf{n}\mathrm{d}s) = -(f_1, f_2) \times (\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x) = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y = \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle.$$

Ezután a Green-tételt kétszer alkalmazva,

$$\int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle = \int_{\partial K} (f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y) = \int_K \Big(- D_2 f_1 + D_1 f_2\Big)\, \mathrm{d}A = \int_K (\operatorname{rot}\mathbf{f})\, \mathrm{d}A.$$

Megjegyzés

A Stokes-tétel lehetőséget ad a rotáció koordinátafüggetlen definíciójára, egy pontra összehúzódó krumplikkal:

$$\operatorname{rot}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = -\lim_{r\to+0} \frac{1}{2\pi} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=r} \mathbf{f} \times \mathbf{n}\mathrm{d}s.$$

3. Integráltételek három dimenzióban

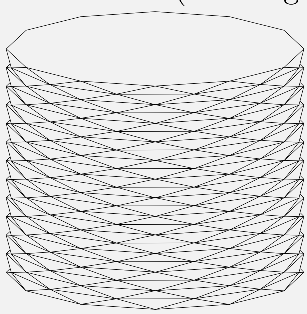
Folytonosan differenciálható paraméteres felületek. Felszín, normálvektor. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafikon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. [LTS2, 211–221. o.]

Definíció

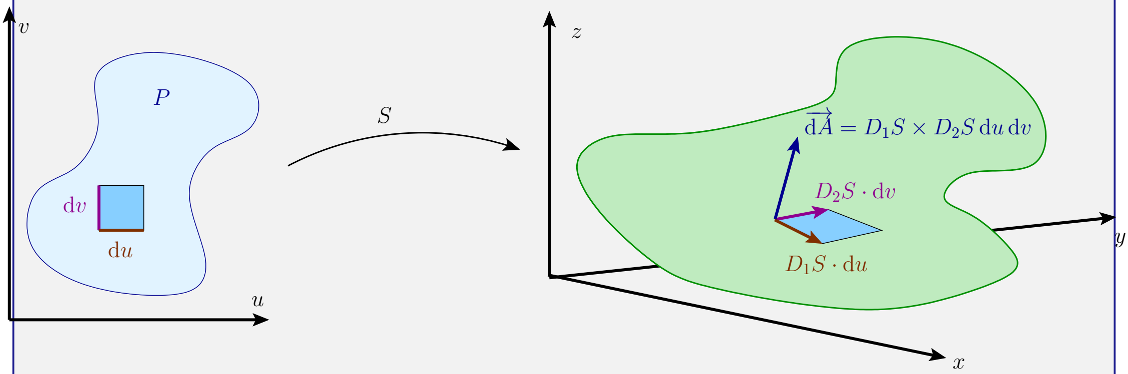
Ha $P \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, akkor a $P \to \mathbb{R}^3$ függvényeket fogjuk *paraméteres felületnek* hívni. Beszélhetünk folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható, darabonként folytonosan differenciálható felületekről is.

Megjegyzés

A felszínt nem lehet — a görbék ívhosszának mintájára — a beírt poligonok felszínének szuprémumaként definiálni (ld. hengerbe beírt lampion).



Definíció



Ha $S : P \to \mathbb{R}^3$ darabonként folytonosan differenciálható felület, akkor

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = (D_1 S \times D_2 S)\ \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \qquad |\mathrm{d}A| = |\overrightarrow{\mathrm{d}A}|, \qquad \mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}A}}{|\mathrm{d}A|} = \frac{D_1 S \times D_2 S}{|D_1 S \times D_2 S|}$$

(*felületelem*, *felszínelem*, illetve *irányított normálvektor*).
Az S felület *felszíne*

$$A = \int_{u,v \in P} |D_1 S \times D_2 S| \mathrm{d}u \mathrm{d}v; \qquad \text{ennek egyfajta rövidítése, jele:} \quad \int_S |\mathrm{d}A|.$$

3. előadás, 2023.03.07.

Definíció

Legyen $P \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ kompakt, és legyen $S : P \to \mathbb{R}^3$ darabonként folytonosan differenciálható felület.
Ha f valamilyen skalár- vagy vektormező, akkor f *felszín szerinti integrálja* az S felületen

$$\int_{(u,v)\in P} f(S(u,v))\; |D_1 S \times D_2 S|\; \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \text{jele:} \quad \int_S f|\mathrm{d}A|.$$

Ha $*$ valamilyen szorzás (bilineáris függvény), akkor

$$\int_{(u,v)\in P} f(S(u,v)) * (D_1 S \times D_2 S)\; \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \text{jele:} \quad \int_S f * \overrightarrow{\mathrm{d}A}.$$

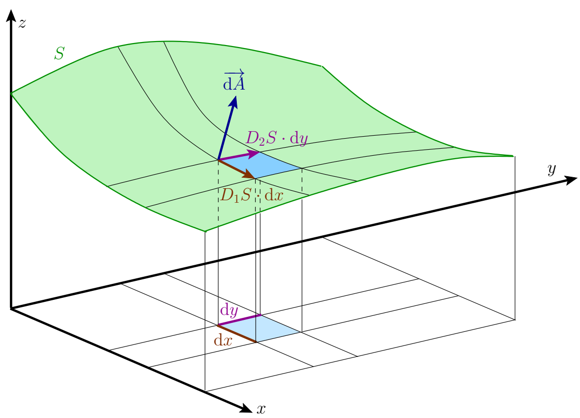
Speciálisan, ha $*$ a skaláris szorzás, akkor f *felületi integrálja* vagy *fluxusa* az S felületen

$$\int_{(u,v)\in P} \left\langle f(S(u,v)), D_1 S \times D_2 S \right\rangle \mathrm{d}u\mathrm{d}v; \qquad \text{jele:} \quad \int_S \langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}A}\rangle.$$

Lemma

Ha $S(u,v) = (u, v, \varphi(u,v))$ egy kétváltozós függvény grafikonja, akkor

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \begin{pmatrix} -D_u\varphi \\ -D_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$



Bizonyítás. $D_1 S = (1, 0, D_u\varphi(u,v))$ és $D_2 S = (0, 1, D_v\varphi(u,v))$, a "felfelé" mutató területvektor tehát

$$\overrightarrow{\mathrm{d}A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_u\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}u \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_v\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}v = \begin{pmatrix} -D_u\varphi \\ -D_v\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Következmény

A grafikon felszíne

$$A = \int_{(u,v)\in P} \sqrt{(D_u\varphi)^2 + (D_v\varphi)^2 + 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

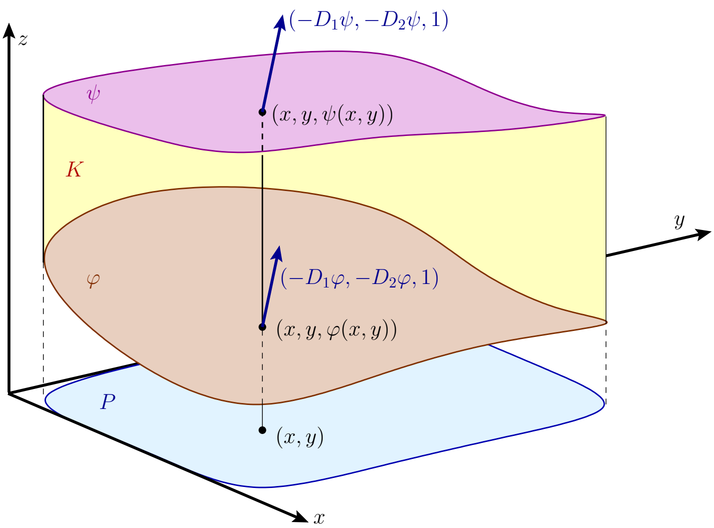
(Kb. ezt is várjuk.)

Lemma (a Green-tétel három-dimenziós változata)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, végül $i \in \{1, 2, 3\}$, akkor

$$\int_K (D_i f)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A}_i.$$

($\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ a térfogatelem; $\overrightarrow{\mathrm{d}A}_i$ a $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$ területvektor i-edik koordinátája.)



Bizonyítás (csak szép normáltartományokra). A z-koordinátára bizonyítunk, vagyis $i = 3$, és feltesszük, hogy K normáltartomány a P szép paramétertartomány fölött. A alsó és a felső grafikon legyen most is $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$, tehát $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in P, \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$. A határ függőleges darabjain $\mathrm{d}\vec{A}_3 = 0$, tehát a z szerinti integrál 0. Az alsó grafikonon a lefelé mutató normálvektort kell használnunk.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} f\ \mathrm{d}\vec{A}_3 &= \int_{(x,y)\in P} f(x, y, \psi(x, y)) \begin{pmatrix} -D_1\psi(x, y) \\ -D_2\psi(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{(x,y)\in P} f(x, y, \varphi(x, y)) \begin{pmatrix} D_1\varphi(x, y) \\ D_2\varphi(x, y) \\ -1 \end{pmatrix}_3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \int_{(x,y)\in P} \Big(f(x, y, \psi(x, y)) - f(x, y, \varphi(x, y)) \Big) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{(x,y)\in P} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} D_3 f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_K D_3 f\ \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Tétel (Newton–Leibniz formula)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

Bizonyítás. A Lemmát mindhárom koordinátára alkalmazva,

$$\int_K (\operatorname{grad} f)\ \mathrm{d}V = \int_K \begin{pmatrix} D_1 f\ \mathrm{d}V \\ D_2 f\ \mathrm{d}V \\ D_3 f\ \mathrm{d}V \end{pmatrix} = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} f\mathrm{d}\vec{A}_1 \\ f\mathrm{d}\vec{A}_2 \\ f\mathrm{d}\vec{A}_3 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} f\ \mathrm{d}\vec{A}.$$

Következmény.

$$\int_{\partial K} \mathrm{d}\vec{A} = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Newton–Leibniz formula a konstans 1 függvényre.

Tétel (3-dimenziós Gauss-Osztrogradszkij tétel, divergenciatétel)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle.$$

Bizonyítás.

$$\int_K (\operatorname{div} \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = \int_K \Big(D_1 f_1\, \mathrm{d}V + D_2 f_2\, \mathrm{d}V + D_3 f_3\, \mathrm{d}V \Big) =$$
$$= \int_{\partial K} \Big(f_1 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_1 + f_2 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_2 + f_3 \mathrm{d}\overrightarrow{A}_3 \Big) = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle.$$

Definíció (vektormező rotációja 3-dimenzióban)

Az $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ vektormező rotációja

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_3 f_1 - D_1 f_3 \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés

A rotáció most is örvénysűrűséget jelent, de az örvények különböző síkokban fekhetnek. Ha egy kis körvonal területvektora $\mathbf{v}$, akkor a körvonalon az örvényerősség $\langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$. Ilyen értelemben a rotáció egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineáris függvény.

Tétel

A rotáció nem függ a koordinátarendszer irányától.

Bizonyítás. Megint vegyük a T transzformációt; azt fogjuk megmutatni, hogy bármilyen $\mathbf{v}$ vektorra

$$\langle \operatorname{rot}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

És valóban,

$$\langle \operatorname{rot}_{\text{új}} \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}} \rangle = \det(\nabla_{\text{új}}, \mathbf{f}_{\text{új}}, \mathbf{v}_{\text{új}}) = \det(T^t \nabla, T^t \mathbf{f}, T^t \mathbf{v}) =$$
$$= \det \Big(T^t \cdot (\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v}) \Big) = \det(\nabla, \mathbf{f}, \mathbf{v}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle.$$

Tétel (Stokes)

Ha $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, továbbá $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}.$$

Bizonyítás.

$$\int_K (\operatorname{rot} \mathbf{f})\ \ \mathrm{d}V = \begin{pmatrix} \int_K D_2 f_3\ \mathrm{d}V - \int_K D_3 f_2\ \mathrm{d}V \\ \int_K D_3 f_1\ \mathrm{d}V - \int_K D_1 f_3\ \mathrm{d}V \\ \int_K D_1 f_2\ \mathrm{d}V - \int_K D_2 f_1\ \mathrm{d}V \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\vec{A}_2 - \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\vec{A}_3 \\ \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\vec{A}_3 - \int_{\partial K} f_3 \mathrm{d}\vec{A}_1 \\ \int_{\partial K} f_2 \mathrm{d}\vec{A}_1 - \int_{\partial K} f_1 \mathrm{d}\vec{A}_2 \end{pmatrix} = \int_{\partial K} (-\mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}).$$

Általános Stokes-tétel

Érdemes összehasonlítanuk az integráltételeinket:

Green-tétel	$\int_K D_i f\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\vec{A}_i$
Newton–Leibniz formula	$\int_K \big(\operatorname{grad} f\big)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}\vec{A}$
Gauss–Osztrogradszkij tétel	$\int_K \big(\operatorname{div} \mathbf{f}\big)\ \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\vec{A} \rangle$
Stokes-tétel	$\int_K \big(\operatorname{rot} \mathbf{f}\big)\ \mathrm{d}V = -\int_{\partial K} \mathbf{f} \times \mathrm{d}\vec{A}$

Ezeknek egy közös általánosítása a következő:

Tétel (általánosabb Stokes-tétel)

Legyenek q, r pozitív egészek, és legyen $* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ valamilyen szorzás (bilineáris leképezés). Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, $K \subset G$ korlátos, zárt krumpli, aminek a ∂K határa darabonként folytonosan differenciálható felület, és ezeken az irányított normálvektor mindig kifelé mutat, és legyen $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int_K (\nabla * \mathbf{f})\, \mathrm{d}V = \int_{\partial K} \mathrm{d}\vec{A} * \mathbf{f}.$$

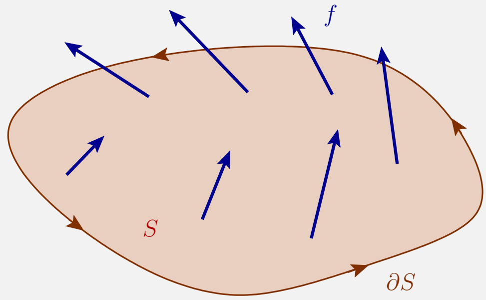
A tételt könnyen bebizonyíthatjuk az előbbi példák alapján. Magasabb dimenzióban a $\mathrm{d}\overrightarrow{A}$ felületelemet kell értelmeznünk, ehhez a vektorális szorzást kell kiterjesztenünk $(p-1)$ darab, p-dimenziós vektorra.

A Newton–Leibniz formula esetében $q = 1$, tehát f skalármező, $r = 3$ és $*$ vektor szorzása skalárral. A Gauss–Osztrogradszkij tételben $q = 3$, $r = 1$ és $*$ a vektorok skaláris szorzata. A Stokes-tételben pedig $q = r = 3$, és $*$ a vektorális szorzás.

A Maxwell-egyenletekben a divergenciatételen kívül a következő integráltétel is szerepel:

Tétel (Kelvin–Stokes (Lord Kelvin = William Thomson, 1824–1907))

Ha $S \subset G$ egy irányított, peremes felület, ami mondjuk darabonként folytonosan differenciálható, a határa pedig szakaszonként C^1, valamint $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező, akkor $\int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{f}, \mathrm{d}\overrightarrow{A} \rangle = \int_{\partial S} \langle \mathbf{f}, \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$.



Jól felismerhető, hogy ez valójában a kétdimenziós Stokes-tétel egy kiterjesztése felületdarabokra.

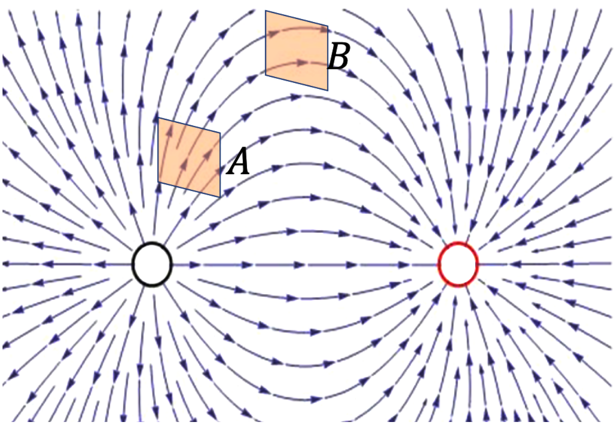
Maxwell-egyenletek

Sorszám, név	Differenciális alak	Integrális alak
I. (Gauss-törvény)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
II. (Faraday–Lenz törvény)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{dl} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$
III. (Gauss mágneses törvénye)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
IV. (Ampère-törvény)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{dl} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$

Az I. és III. egyenletnél a Gauss-Osztrogradszkij tétel, a II. és IV. egyenletnél a Kelvin-Stokes tétel a kapcsolat a differenciális és az integrális alakok között.

Erővonalak és divergenciamentesség

Az elektromos, mágneses és a gravitációs mezőket is szeretjük "erővonalakkal" szemléltetni. Az erővonalak iránya megyezik a térerősség irányával, az erővonalak sűrűsége pedig a térerősség nagyságával. Egy irányított felületdarabon a mező fluxusa a felületet átdöfő erővonalak száma.



(Forrás: `http://www.physicsbootcamp.org/Flux-of-Electric-Field.html`

Az erővonalas szemléltetés akkor jogos, ha a forrásmentes, tehát 0 töltésű/tömegű térrészek fluxusa 0, vagyis ha a vektromező divergenciamentes. Ezért sem szoktunk töltött testek belsejében erővonalakat rajzolni.

Körülfordulási szám és változatai

A Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint divergenciamentes vektormezőnek minden szép krumpli határán nulla a felületi integrálja. Ez lehetőséget ad a primitív függvényről szóló fejezet általánosítására: meg lehetne csinálni a Goursat-lemma felületi integrálokról szóló variánsát, és bebizonyítani, hogy minden nullhomotóp zárt felületen (vagy akár csak poliéderen) nulla a felületi integrál. Ezzel az eszközzel be tudjuk bizonyítani például azt, hogy $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-bel.

Két dimenzióban a γ görbének az $\mathbf{a}$ pont körüli körülfordulási számát a következő alakba is írhatjuk:

$$n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}; \mathrm{d}\overrightarrow{A} \right\rangle$$

ahol az integrál előtt álló 2π az egységkör kerülete.

Ennek mintájára, ha $\mathcal{S}$ darabonként folytonosan differenciálható, irányított zárt felület $\mathbb{R}^3$-ban, amely nem megy át a $\mathbf{a}$ ponton, akkor az

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}; \mathrm{d}\overrightarrow{A} \right\rangle$$

felületi integrál azt számolja meg, hogy az S felület hányszor "kerüli meg" az $\mathbf{a}$ pontot.

(A $\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}$ vektormező divergenciamentes; a origó középpontú gömbökön a fluxusa 4π, ami az egységgömb felszíne.)

Érdemes öszehasonlítanunk az előbbi képleteket a Gauss-féle összehurkolódási számmal.

- $\mathbb{R}^2$-ben az $\mathbf{a}$ pontot a γ zárt görbe ennyiszer kerüli meg:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{c})}{|\mathbf{x}-\mathbf{c}|^2} \times \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2}; \mathbf{n}\mathrm{d}s \right\rangle$$

- $\mathbb{R}^3$-ban az $\mathbf{a}$ pontot az $\mathcal{S}$ zárt felület ennyiszer kerüli meg:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^3}; \mathrm{d}\overrightarrow{A} \right\rangle$$

- $\mathbb{R}^3$-ban a γ_1 zárt görbén a γ_2 zárt görbe ennyiszer bújik át:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{x}\in\gamma_1} \int_{\mathbf{y}\in\gamma_2} \left\langle \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}; \mathrm{d}\mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{y} \right\rangle$$

- Ezeknek közös általánosítása az általánosított összekapcsolódási szám.

II. rész

Mértékek

4. előadás, 2023.03.09.

4. Halmazstruktúrák, Borel-halmazok

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, σ-additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$-n.

Halmazrendszerek, megszorítás. Halmazalgebra, gyűrű, modulus, félgyűrű, σ-algebra, σ-gyűrű. Generált struktúrák. Halmazstruktrák megszorításai. Borel-halmazok top. terekben. Mérhető tér. Halmazfüggvények. Monoton, additív, σ-additív és σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, akkor $\mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$. Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ és $\mu(A_1) < \infty$, akkor $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$. [Petruska, 51–52, 55, 81–82. o.]

Az eddigi Jordan-mértéket és a többváltozós Riemann-integrált szeretnénk kiterjeszteni minél többféle halmazra és függvényre. A Jordan-mérhető halmazok rendszerét $\mathcal{J}$ vagy $\mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ fogja jelölni; az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz Jordan-mértékét pedig (ha van) $t(A)$, a külső és belső mértékét $\overline{t}(A)$, illetve $\underline{t}(A)$. (A k és b betűkkel takarékoskodunk.)

Rózsaszínű álom

Szeretnénk a Jordan-mértéket a tér minden részhalmazára kiterjeszteni; olyan $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^p) \to [0, \infty]$ függvényt, ami additív, sőt σ-additív, normált és eltolásinvariáns.

σ-additív tulajdonság: ha $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}^p$ páronként diszjunktak, akkor

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

A σ-additivitás nagyon lényeges tulajdonság lesz többféle matematikai területen, például valószínűségszámításban: ha $A_1, A_2, \ldots$ egymást kizáró események egy sorozata, akkor elvárjuk, hogy

$$P(A_1 \vee A_2 \vee \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

teljesüljön.

Az első, kézenfekvő lehetőség, hogy a külső Jordan-mérték definíciójában végtelen sok halmazzal való fedéseket is megengedünk. Az így kapott függvény, amely $\mathbb{R}^p$ részhalmazaihoz rendel $[0,\infty]$-beli értékeket, a Lebesgue-féle külső mérték:

Definíció (Lebesgue-féle külső mérték (Henri Léon Lebesgue, 1875–1941))

Bármely $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *Lebesgue-féle külső mértéke*

$$\overline{\lambda}(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(R_k) : R_1, R_2, \ldots \text{ tengelypárhuzamos téglák, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k. \right\}.$$

- $\overline{\lambda}$ egy $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p) \to [0,\infty]$ függvény. Korlátos halmazokra $\overline{\lambda}(A) \leqslant \overline{t}(A)$.
- Végtelen sok belső tégla nem ad új belsőmérték-fogalmat.
- Rossz hír: Sajnos $\overline{\lambda}$ nem additív; az egységkockát fel lehet bontani két diszjunkt halmazra, amelyek külső mértékének összege nagyobb, mint 1.
- A Jordan-mértékhez hasonlóan csak bizonyos halmazokat fogunk *Lebesgue-mérhetőnek* hívni. Ezekre megszorítva a *Lebesgue-mérték* normált, σ-additív és eltolásinvariáns lesz.
- A Lebesgue-féle külső mérték többféle halmazra ad egy használható mértékfogalmat, mint a Jordan-mérték, például az összes megszámlálható halmaz nullmértékű, és minden nyílt és minden zárt halmaz mérhető lesz (v.ö. a kövér Cantor halmazok nem Jordan-mérhetők).
- Probálkozhatnánk más módokon, az egész $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ halmazon értelmes függvényt konstruálni (hajrá), de erre nincs sok esélyünk, mert...

Tétel (álomgyilkos tétel)

Nem létezik normált, eltolásinvariáns, σ-additív $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^p) \to [0,\infty]$ függvény.

Bizonyítás (Vitali-konstrukció).

$\lightning$ Tegyük fel, hogy mégis létezik egy ilyen μ függvény.
Először is jegyezzük meg, hogy tetszőleges $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ esetén

$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(B).$$

Legyen $H \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]^p$ olyan halmaz, amely minden $\mathbb{Q}^p$ minden eltoltjából pontosan egy elemet tartalmaz. Bármely $r, s \in \mathbb{Q}^p$, $r \neq s$ esetén $H + r$ és $H + s$ diszjunkt, és az eltolásinvariancia miatt $\mu(H + r) = \mu(H + s) = \mu(H)$. Ezen kívül bármely $r \in \mathbb{Q}^p \cap [0, \frac{1}{2}]^p$ esetén $H + r \subset [0, 1]^p$.

Vegyük a $\mathbb{Q}^p \cap [0, \frac{1}{2}]^p$ halmaz egy $r_1, r_2, \ldots$ felsorolását: ekkor

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H + r_k) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (H + r_k) \right) \leqslant \mu\big([0, 1]^p\big) = 1,$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\mu(H) = 0$.

Most vegyük a $\mathbb{Q}^p$ egy $s_1, s_2, \ldots$ felsorolását. Ekkor

$$\mathbb{R}^p = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (H + s_k),$$

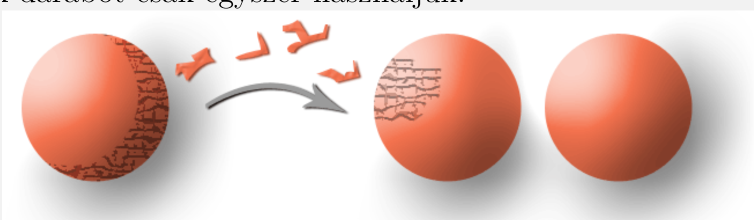
és

$$1 = \mu\big([0, 1]^p\big) \leqslant \mu\big(\mathbb{R}^p\big) = \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (H + s_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H + s_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(H) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0. \quad \lightning$$

Ez ellentmondás, így nincs ilyen μ.

Tétel (Banach–Tarski paradoxon (Stefan Banach, 1892–1945; Alfred Tarski, 1901–1983))

A kiválasztási axióma segítségével, $\mathbb{R}^3$-ben a zárt egységgömb felbontható véges sok, páronként diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy ezekkel egybevágó halmazokból két zárt egységgömböt lehet összerakni úgy, hogy mindegyik darabot csak egyszer használjuk.



https://hu.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski-paradoxon

Következmény

Az $\mathbb{R}^3$ korlátos részhalmazain nem létezik nemnegatív, additív, egybevágóság-invariáns, normált függvény.

Halmazstruktúrák és mérhető terek

Mindig lesz egy nemüres alaphalmazunk (többnyire X, esetleg $\mathbb{R}^p$). Az X-et és részhalmazait nyomtatott nagy betűkkel fogjuk jelölni, halmazrendszereket írott nagy betűvel pl. $\mathcal{P}(X)$. Általában a különböző halmazrendszereknek mindig eleme lesz az üres halmaz. A valós/komplex értékű halmazfüggvényeket, amelyek X bizonyos részhalmazaihoz rendelnek valós vagy komplex számokat, kis görög betűvel fogjuk jelölni.

Definíció (halmazgyűrű)

Az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *(halmaz)gyűrű*, ha

- $\varnothing \in \mathcal{R}$,
- Bármely $A, B \in \mathcal{R}$ esetén $(A \cup B) \in \mathcal{R}$, $(A \cap B) \in \mathcal{R}$ és $(A \backslash B) \in \mathcal{R}$.

Például $\mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ egy halmazgyűrű $\mathbb{R}^p$-ben. De bármely X esetén gyűrű a teljes $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmaz vagy a $\{\varnothing\}$ elemű gyűrű is.

A szimmetrikus differenciával, mint összeadással és a metszettel, mint szorzással, a halmazgyűrű egyben algebrai gyűrű is. Ez az algebrai gyűrű akkor egységelemes, ha gyűrűbeli halmazok uniója is gyűrűelem.

Definíció (halmazalgebra)

Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *(halmaz)algebra*, ha olyan gyűrű, ami zárt a komplementerképzésre is:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ és $X \in \mathcal{A}$;
- Bármely $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $(A \cup B) \in \mathcal{A}$, $(A \cap B) \in \mathcal{A}$, $(A \backslash B) \in \mathcal{A}$ és $(X \backslash A) \in \mathcal{A}$.

Triviális🙈 példák a $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmaz, az $\{\varnothing, X\}$ kételemű algebra.

A $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmaz a szimmetrikus differenciával és a metszettel pontosan ugyanaz, mint ${\mathbb{F}_2}^X$: az X minden eleméhez vesszük a kételemű test egy példányát, és ezek direkt szorzatát.

Definíció (σ-gyűrű)

Az $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *σ-gyűrű*, ha olyan gyűrű, ami a megszámlálható unióra is zárt: bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ esetén $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$.

Megjegyzés

A σ-gyűrűk a megszámlálható metszetre is zártak, mert bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ esetén

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \backslash \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} (A_1 \backslash A_k) \right).$$

Definíció (σ-algebra)

Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *σ-algebra*, ha olyan algebra, ami a megszámlálható unióra is zárt: bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ esetén $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Megjegyzés

Az előző számolással ellentétben most felhasználhatjuk az X halmazt is, és az A_k halmazok komplementereit:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \backslash A_k) \right).$$

Általában olyan halmazfüggvényekkel fogunk foglalkozni, amelyek valamilyen σ-algebra, esetleg σ-gyűrű elemeihez rendelnek számokat. Az ilyen mértékjellegű függvények kiterjesztésekor fogjuk használni a következőket:

Definíció (halmazmodulus)

Az $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *(halmaz)modulus*, ha

- $\emptyset \in \mathcal{M}$,
- Bármely $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $(A \cap B) \in \mathcal{M}$ és $(A \backslash B) \in \mathcal{M}$.

Megjegyzés

A metszetet nem lenne muszáj kikötni, mert kifejezhető a különbséggel:

$$A \cap B = \big(A \backslash (A \backslash B)\big).$$

A modulusok használatát teljesen ki fogjuk kerülni; a teljesség kedvéért írtam le.

Definíció (halmazfélgyűrű)

Az $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer egy *(halmaz)félgyűrű*, ha

- $\varnothing \in \mathcal{F}$;
- Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $(A \cap B) \in \mathcal{F}$;
- Bármely $A, B \in \mathcal{F}$ esetén az $A \backslash B$ különbség felírható véges sok félgyűrűelem diszjunkt uniójaként, tehát létezik olyan n pozitív egész és páronként diszjunkt $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$, hogy $A \backslash B = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n$.

Félgyűrűre a legfontosabb példa a számegyenes $[a, b)$ alakú, balról zárt, jobbról nyílt intervallumainak rendszere (természetesen kiegészítve az üres halmazzal, mint elemmel). Magasabb dimenzióban, $\mathbb{R}^p$-ben pedig az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú félig nyílt téglák.

Általában a mértékeinket előbb valamilyen félgyűrűn fogjuk definiálni, majd a félgyűrűről fogjuk kiterjeszteni a halmazfüggvényt – vagy előbb a generált modulusra, vagy közvetlenül – a generált gyűrűre, σ-gyűrűre vagy σ-algebrára.

Nyugodtan gondolhatunk a félgyűrűre, mint valamiféle tégláknak a rendszerére: a halmazfüggvényeink kiterjesztése mindig úgy fog történni, hogy a különböző halmazokat lefedjük megszámlálható sok téglával. (Ezért is jelölöm inkább $\mathcal{F}$-fel: $\mathcal{F}$ mint $\mathcal{F}$élgyűrű, aminek az elemeivel $\mathcal{F}$edni fogunk halmazokat.)

4.1 Lemma (lem.fgyatrend)

(a) Legyen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű és $B, A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$. Ekkor léteznek olyan $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{F}$ diszjunkt halmazok, hogy

$$B \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_k) = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n.$$

(b) Bármely $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ sorozat uniója átrendezhető diszjunkt halmazok uniójára: léteznek olyan páronként diszjunkt $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ halmazok és olyan $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots$ indexsorozat, hogy bármely n-re

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_{k_n}.$$

Bizonyítás. (a) Indukció k szerint.

(b) Minden $i \geqslant 2$-re vegyünk olyan $C_{i,1}, \ldots, C_{i,m_i}\mathcal{F}$ gyűrűelemeket, amelyekre $A_i \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) = C_{i,1} \sqcup \ldots \sqcup C_{i,m_i}$, majd legyen

$$(B_1, B_2, B_3, \ldots) = (A_1,\ C_{1,1}, \ldots, C_{1,m_1},\ C_{2,1}, \ldots, C_{2,m_2},\ \ldots).$$

Tétel (generált halmazstruktúrák)

Bármely $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszerhez létezik legszűkebb $\mathcal{A}$-t tartalmazó halmazalgebra, σ-algebra, gyűrű, σ-gyűrű, illetve modulus.

Bizonyítás. Halmazalgebrák, σ-algebrák, gyűrűk, σ-gyűrűk, illetve modulusok metszete is halmazalgebra, σ-algebra, gyűrű, σ-gyűrű, illetve modulus. Vegyük az $\mathcal{A}$-t tartalmazó halmazalgebrák, σ-algebrák, gyűrűk, σ-gyűrűk, illetve modulusok metszetét. (A metszetnek biztosan van legalább egy tagja: a $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmaz.)

Megjegyzés

Generált félgyűrű többnyire nincs, mert könnyen elhagyhatunk elemeket úgy, hogy a struktúra még mindig félgyűrű maradjon.
(A félgyűrű nem algebrai struktúra.)

Definíció (halmazrendszer megszorítása)

Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ megszorítása a $H \subset X$ halmazra

$$\mathcal{A}|_H = \{A \cap H : A \in \mathcal{A}\}.$$

Trivialitás🙊

Algebra, gyűrű, modulus, félgyűrű megszorítása is algebra, gyűrű, modulus, illetve félgyűrű.

Borel-halmazok

Definíció (Borel-halmazok (Félix Edouard Justin Émile Borel, 1871–1956))

- Ha $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér (tehát $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ a nyílt halmazok rendszere), akkor a $\mathcal{T}$ által generált σ-algebra elemei a tér *Borel-halmazai*. A generált σ-algebrát $\mathcal{B}(X)$ vagy egyszerűen $\mathcal{B}$ fogja jelölni.
- Ezen belül fontos halmaz kategóriák:
  - $\mathcal{G}_\delta(X) = \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \text{ nyíltak} \right\}$: a megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként előálló halmazok;
  - $\mathcal{F}_\sigma(X) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \text{ zártak} \right\}$: a megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként előálló halmazok;
  - $\mathcal{G}_{\delta\sigma}(X) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}_\delta \right\}$: a megszámlálható sok $\mathcal{G}_\delta$ halmaz uniójaként előálló halmazok;
  - $\mathcal{F}_{\sigma\delta}(X) = \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_\sigma \right\}$: a megszámlálható sok $\mathcal{F}_\sigma$ halmaz metszeteként előálló halmazok;
  - $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}(X) = \left\{ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}_{\delta\sigma} \right\}$: a megszámlálható sok $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ halmaz metszeteként előálló halmazok;
  - $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}(X) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k : \ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_{\sigma\delta} \right\}$: a megszámlálható sok $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ halmaz uniójaként előálló halmazok;
  - ...

Példák

- A valós számegyenesen $\mathcal{G}_\delta$ az összes intervallum és minden zárt halmaz.
- Minden megszámlálható halmaz $\mathcal{F}_\sigma$, mert megszámlálható sok egypontú zárt halmaz uniója.
- $\mathbb{Q} \in \mathcal{F}_\sigma(\mathbb{R})$, de $\mathbb{Q} \notin \mathcal{G}_\delta(\mathbb{R})$. (Jó gyakorlat a Cantor-axiómára és a Baire-kategóriatételre.)
- A $\mathcal{B}$ generálásához nincs szükség minden nyílt halmazra. Például a számegyenesen a racionális végpontú, (q, ∞) félegyenesek vagy a racionális gömbök generálják az összes nyílt halmazt.

Hány Borel-halmaz van?

Jó kérdés, hogy a $\mathcal{G}_\delta, \mathcal{G}_{\delta\sigma}, \mathcal{G}_{\delta\sigma\delta}, \ldots$ sorozat mikor, melyik rendszámnál stabilizálódik, mikor kapunk először σ-algebrát; onnan kezdve már nem kapunk új Borel-halmazokat.

Tétel

$\left|\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)\right| = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, avagy az $\mathbb{R}^p$ térben kontinuum sok Borel-halmaz van.

Bizonyítás. Az egypontú halmazok is Borelek, tehát legalább kontinuum sok Borel-halmaz van; a kérdés a felső becslés.

Kicsit formálisabban, definiáljuk transzfinit rekurzióval a következő sorozatot:

- $\mathcal{B}_0$ a nyílt téglák halmaza;
- Bármely α rendszámra legyen $\mathcal{B}_{\alpha\dot{+}1}$ az olyan halmazok rendszere, amelyek előállnak $\mathcal{B}_\alpha$-beli halmazok komplementere, különbsége, véges metszete vagy megszámlálható uniójaként.
- Bármely α limeszrendszámra legyen $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta$.

Vegyük észre, hogy a sorozat monoton nő, $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}_{\alpha\dot{+}1}$.

Az állítjuk, hogy a $\mathcal{B}_{\omega_1}$ rendszer már σ-algebra; (ω_1 az első nem megszámlálható rendszám). Ezt most csak a megszámlálható unióra ellenőrizzük.

Legyen $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{B}_{\omega_1}$; azt kell ellenőriznünk, hogy ezek uniója is $\mathcal{B}_{\omega_1}$-ben van. Az ω_1 egy limeszrendszám, tehát mindegyik A_i benne van egy korábbi $\mathcal{B}_{\alpha_i}$ osztályban. Legyen $\beta = \sup \alpha_i = \bigcup \alpha_i$; ekkor $A_1, A_2, \ldots$ mind $\mathcal{B}_\beta$-beli, az uniójuk $\mathcal{B}_{\beta\dot{+}1}$-beli. A β megszámlálható sok megszámlálható rendszám uniója, maga is megszámlálható, ezért $\beta\dot{+}1 < \omega_1$, tehát $\bigcup A_i \in \mathcal{B}_{\beta\dot{+}1} \subset \mathcal{B}_{\omega_1}$. Ezzel megvan, hogy $\mathcal{B}_{\omega_1}$ zárt a megszámlálható unióra.

A $\mathcal{B}$ generátorrendszer kontinuum számosságú. Tudjuk, hogy kontinuum sok kontinuum számosságú halmaz uniója is kontinuum számosságú, illetve egy kontinuum számosságú halmaz elemeiből álló sorozatok halmaza is kontinuum. Ennek felhasználásával **triviális**🙊 transzfinit inukcióval igazolhatjuk, hogy mindegyik $\mathcal{B}_\alpha$ osztály kontinuum számosságú.

5. előadás, 2023.03.14.

5. Halmazfüggvények, mértékek

Definíció

Jelölés: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Definíció (monoton halmazfüggvény)

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer, $\emptyset \in \mathcal{A}$, és $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.
Az α halmazfüggvény *monoton*, ha bármely $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ esetén $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$.

Definíció (additív és σ-additív halmazfüggvények)

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer, $\emptyset \in \mathcal{A}$, $\alpha : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ vagy $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, és $\alpha(\emptyset) = 0$.

- Az α halmazfüggvény *(végesen) additív*, ha bármely olyan, páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ halmazokra, amelyekre $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \in \mathcal{A}$,
$$\alpha\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$
Ebbe beleértjük, hogy *az összeg mindig létezik*, tehát a tagok között nem szerepelhet a $-\infty$ és a $+\infty$ érték is.

  Ha $\mathcal{A}$ gyűrű, akkor az additivitást elég $n = 2$-re megkövetelni.

- Az α halmazfüggvény *σ-additív*, ha bármely olyan, páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokra, amelyekre $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \in \mathcal{A}$,
$$\alpha\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$
Ebbe beleértjük, hogy *az összeg mindig létezik, és sorrendfüggetlen* is.

Trivialitás🙊

A σ-additivitásból következik az additivitás, mert a véges unióhoz hozzávehetünk végtelen sok üres halmazt.

Definíció (szubadditív és σ-szubadditív halmazfüggvények)

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer, $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\alpha(\varnothing) = 0$.

- Az α halmazfüggvény *szubadditív*, ha bármely olyan $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathcal{A}$ halmazokra, amelyekre $B \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$,

$$\alpha(B) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i).$$

- Az α halmazfüggvény *σ-szubadditív*, ha bármely olyan $B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokra, amelyekre $B \subset (A_1 \cup A_2 \cup \ldots)$,

$$\alpha(B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i).$$

Trivialitás🙊

A σ-szubadditivitásból következik a szubadditivitás, mert a véges unióhoz hozzávehetünk végtelen sok üres halmazt.

Definíció (Mérhető tér)

Mérhető tér: $(X, \mathcal{M})$, ahol $X \neq \varnothing$ a tér alaphalmaza, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ egy σ-algebra, a "mérhető" halmazok rendszere.

Majd a mérhető tereken értelmezni fogunk többféle "mértéket"...

Definíció (mérték)

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér.

- A σ-additív $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ függvényeket $(\mu(\varnothing) = 0)$ *mérték*eknek nevezzük.
- A σ-additív $\vartheta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ függvények $(\vartheta(\varnothing) = 0)$ az *előjeles mérték*ek.
- A σ-additív $\vartheta : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ függvények $(\vartheta(\varnothing) = 0)$ a *komplex mérték*ek. Csak véges értékeik lehetnek.

Definíció (mértéktér)

- $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *mértéktér*, ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, és $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ mérték.
- $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ *előjeles mértéktér*, ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, és $\vartheta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték.
- $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ *komplex mértéktér*, ha $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, és $\vartheta : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ komplex mérték.

Példák

- Konstans nulla mérték:
$$\mu \equiv 0$$
- Konstans ∞:
$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{ha } A = \varnothing \\ \infty & \text{ha } A \neq \varnothing \end{cases}$$
- Tetszőleges X alaphalmaz esetén a $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ függvény *számlálómérték* vagy *számosságmérték*, ha $A \subseteq X$ esetén
$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{ha } |A| \text{ véges} \\ \infty & \text{ha } |A| \text{ végtelen} \end{cases}$$
- Tetszőleges X alaphalmaz és $x_0 \in X$ esetén $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *Dirac-mérték* vagy *x_0-ra koncentrált mérték*, ha $A \subseteq X$ esetén
$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x_0 \in A \\ 0 & \text{ha } x_0 \notin A \end{cases}$$
(Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984)

Lemma

Legyen μ előjeles vagy komplex mérték.

- μ additív: ha $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt mérhetők, akkor $\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
- Ha μ mérték, akkor monoton: ha $A \subset B$ mérhető halmazok, akkor $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
- Ha $A \subset B$ és $|\mu(A)| < \infty$ vagy $|\mu(B)| < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Bizonyítás. (a) A σ-additivitásból következik az additivitás.

(b) Ha $A \subset B$, akkor
$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \sqcup (B \setminus A)\big) = \mu(B).$$

(c) Az additivitás miatt $\mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A)$. Ha $\mu(A)$ véges, akkor ki tudjuk vonni mindkét oldalból. Ha $\mu(B)$ véges, az csak úgy lehet, ha a jobboldalon mindkét tag véges.

Lemma (a mértékek folytonossága)

Legyen μ előjeles vagy komplex mérték.

- Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ mérhető halmazok, akkor $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
- Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mérhető halmazok, és $\left|\mu(A_1)\right| < \infty$, akkor $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Megjegyzés

Egy $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozat *limesz inferiora* és *limesz szuperiora*

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \Big\{x:\ \text{véges sok } n \text{ kivételével } x \in A_n\Big\}, \text{ illetve}$$
$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = \Big\{x:\ \text{végtelen sok } n\text{-re } x \in A_n\Big\}.$$

Például ha a sorozat növekvő vagy csökkenő, akkor ezek megegyeznek, és a tétel azt állítja, hogy

$$\mu\big(\lim A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Bizonyítás. (a) Legyen $A_0 = \varnothing$ és $B_n = A_n\setminus A_{n-1}$, szóval $A_n = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_n$.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).$$

(b) Legyen $B_n = A_1\setminus A_n$; ekkor $\varnothing = B_1 \subset B_2 \subset \ldots$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1\setminus B_n)\right) = \mu\left(A_1\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) =$$
$$= \mu(A_1) - \lim \mu(B_n) = \lim \big(\mu(A_1) - \mu(B_n)\big) = \lim \big(\mu(A_1\setminus B_n)\big) = \lim \big(\mu(A_n)\big).$$

Példa

A második állításnál lényeges, hogy legyen legalább egy véges mértékű halmaz a sorozatban.

Ha $A_n = (n, \infty)$, és mondjuk μ a számosságmérték vagy az 1-dimenziós Lebesgue-mérték vagy a konstans ∞ mérték, akkor $\mu(\bigcap A_n) = \mu(\emptyset) = 0$, de $\mu(A_n) = \infty \nrightarrow 0$.

6. Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt. [Petruska, 69–70, 81–82. o.]

Definíció (Lebesgue-féle külső mérték)

Bármely $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *Lebesgue-féle külső mértéke*

$$\overline{\lambda}(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(R_k) : \ R_1, R_2, \ldots \text{ tengelypárhuzamos téglák, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k. \right\}.$$

Változatok:

- csak nyílt téglák
- csak $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú félig nyílt téglák
- bármilyen téglák

Ezek ugyanazt az infimumot adják, mert bármilyen fedésben megnövelhetjük a téglákat úgy, hogy már az előírt osztályba tartozzanak, és az i-edik tégla mértékét legfeljebb $\frac{\varepsilon}{2^i}$-vel, összesen legfeljebb ε-nal növeljük meg.

Definíció (Lebesgue-féle külső mérték, alternatív definíció)

Bármely $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *Lebesgue-féle külső mértéke*

$$\overline{\lambda}(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(M_k) : \ M_1, M_2, \ldots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p), \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k. \right\}.$$

Állítás

A kétféle definíció tényleg ugyanaz.

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges, és a kétféle infimum

$$r = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(R_k) : \ R_1, R_2, \ldots \text{ tengelypárhuzamos téglák, } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k. \right\}$$

$$m = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t(M_k) : \ M_1, M_2, \ldots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p), \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k. \right\}.$$

Bizonyítás arra, hogy $m \leqslant r$: ha $r = \infty$, akkor **triviális**🙈; mostantól r véges.

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Ehhez van az A-nak olyan $\bigcup R_k$ fedése téglákkal, amelyekre $\sum t(R_k) < r + \varepsilon$.

Minden tégla Jordan-mérhető, így ugyanez az összeg szerepel a második halmazban is. Ezért

$$m \leqslant \sum t(R_k) < r + \varepsilon.$$

Most a $\varepsilon \to +0$ határátmenetből $m \leqslant r$.

Bizonyítás arra, hogy $r \leqslant m$: ha $m = \infty$, akkor **triviális**🙈; mostantól m véges.

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Ehhez van az A-nak olyan $\bigcup M_k$ fedése Jordan-mérhető halmazokkal, amelyekre $\sum t(M_k) < m + \varepsilon$.

Minden egyes M_k Jordan-mérhető halmazt lefedhetünk néhány téglával, mondjuk $R_{k,1}, \ldots, R_{k,n_k}$-val úgy, hogy $t(R_{k,1}) + \ldots + t(R_{k,n_k}) < t(M_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^k}$ legyen. Az összes ilyen tégla együttesen lefedi A-t, ezért

$$r \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n_k} t(R_{k,i}) \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(t(M_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} t(M_k) + \varepsilon < (m + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Ismét $\varepsilon \to +0$-ból $r \leqslant m$.

Tétel

- $\overline{\lambda}(\emptyset) = 0$.
- $\overline{\lambda}$ monoton.
- $\overline{\lambda}$ egybevágóságinvariáns.
- $\overline{\lambda}(c \cdot A) = |c|^p \cdot \overline{\lambda}(A)$.
- Ha $M \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ lineáris transzformáció, akkor $\overline{\lambda}(M(A)) = |\det M| \cdot \overline{\lambda}(A)$.
- A $\overline{\lambda}$ függvény szubadditív.
- A $\overline{\lambda}$ függvény σ-szubadditív.

Bizonyítás.

- Az üres fedés is fedi az üres halmazt.
- Ha $A \subset B$, akkor B minden fedése A-nak is fedése, ezért $\overline{\lambda}(A)$ egy bővebb halmaz infimuma.
- Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ és $B \subset \mathbb{R}^p$ egybevágó, és azt a definíciót használjuk, amikor Jordan-mérhető hamazokkal fedünk, akkor a fedések is egybevágók.
- Ugyanez volt a képlet téglákra.
- Ugyanez volt a képlet Jordan-mérhető fedő halmazokra.
- A szubadditivitás következik a σ-szubadditivitásból.
- Állítás: a $\overline{\lambda}$ függvény σ-szubadditív.
  - Tegyük fel, hogy $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; az kell, hogy $\overline{\lambda}(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}(A_n)$.
  - Ha valamelyik $\overline{\lambda}(A_n) = \infty$ akkor az állítás **triviális**🙊.
  - Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t.
  - Mindegyik A_n-et fedjük le $R_{n1}, R_{n2}, \dots$ téglákkal úgy, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} t(R_{nk}) < \overline{\lambda}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$.
  - A fedések együtt lefedik B-t:
  $$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_{nk} \right)$$
  ezért a $\overline{\lambda}(B)$ definíciójából
  $$\overline{\lambda}(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t(R_{nk}) \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\lambda}(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}(A_n) + \varepsilon.$$
  - Az $\varepsilon \to +0$ határátmenetből kapjuk, hogy
  $$\overline{\lambda}(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda}(A_n).$$

Tétel

- $\overline{\lambda} \leqslant \overline{t}$.
- Ha K kompakt, akkor $\overline{\lambda}(K) = \overline{t}(K)$.
- Ha A Jordan-mérhető, akkor $\overline{\lambda}(A) = t(A)$.

Bizonyítás.

- A külső Jordan-mérték definíciójában a véges fedéseket kiegészíthetjük végtelen sok üres halmazzal.
- Ha K kompakt, akkor vegyük a külső Lebesgue- és a külső Jordan-mértéknek azt a definícióját, amikor nyílt téglákkal fedünk. Minden fedésből kiválasztható véges fedés, ezért a K külső Lebesgue- és a külső Jordan-mértéke ugyanaz.
- Ha A Jordan-mérhető, akkor

$$0 \leqslant \overline{\lambda}(\partial A) \leqslant \overline{t}(\partial A) = 0, \quad \text{tehát} \quad \overline{\lambda}(\partial A) = 0,$$

$$t(A) = \overline{t}(\operatorname{cl} A) = \overline{\lambda}(\operatorname{cl} A) \leqslant \overline{\lambda}(A) + \overline{\lambda}(\partial A) = \overline{\lambda}(A) \leqslant \overline{t}(A) = t(A).$$

Lebesgue-mérhetőség

Definíció (Lebesgue-féle belső mérték)

A Lebesgue-féle belső mérték lehetne akár ez is: ha $A \subset [0,1]^p$, akkor

$$\underline{\lambda}(A) = 1 - \overline{\lambda}([0,1]^p \backslash A)$$

Általában

$$\underline{\lambda}(A) = \sum_{(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{Z}^p} \left(1 - \overline{\lambda}\Big([a_1, a_1+1) \times \ldots \times [a_p, a_p+1) \backslash A\Big)\right)$$

(V.ö. Ha J Jordan-mérhető és $A \subset J$, akkor $\underline{t}(A) = t(J) - \overline{t}(J \backslash A)$.)

Megjegyzés

A mérhetőséget a külső és a belső mértékek egyenlőségével is lehetne definiálni, de inkább mélyen hallgatni fogunk a belső mértékről. A mérhetőség definíciójához csak a külső mertéket fogjuk használni.

Definíció (Lebesgue-mérhetőség)

$A \subset \mathbb{R}^p$ *Lebesgue-mérhető*, ha bármely $H \subset \mathbb{R}^p$ esetén

$$\overline{\lambda}(H) = \overline{\lambda}(H \cap A) + \overline{\lambda}(H \setminus A).$$

(A szubadditivitás miatt $\leqslant$ automatikus; a kérdés az, hogy $=$ vagy $<$.)

Feladat

Jó gyakorlat bebizonyítani, hogy bármely *korlátos* $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha ha bármely *korlátos* $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz esetén $\overline{t}(H) = \overline{t}(H \cap A) + \overline{t}(H \setminus A)$.

Tétel

A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen a külső Lebesgue-mérték σ-additív. (Bizonyítás a következő fejezetben).
A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebráját $\mathcal{L}$ vagy $\mathcal{L}_p$ jelöli; magát a mértéket $\lambda(...)$ vagy $\lambda_p(...)$.

Tétel

- Minden Jordan-mérhető halmaz egyben Lebesgue-mérhető is, tehát a Lebesgue-mérték tényleg kiterjesztése a Jordan-mértéknek. (Bizonyítás a következő fejezetben).
- Minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető, tehát $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$.

Nullmértékű halmazok

Definíció (nullmértékű halmaz)

$A \subset \mathbb{R}^p$ *nullmértékű* vagy *Lebesgue-nullmértékű*, ha $\overline{\lambda}(A) = 0$.

Tétel

Minden nullmértékű halmaz mérhető.

Bizonyítás. Ha N nullmértékű, vagyis $\overline{\lambda}(N) = 0$ és $H \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges, akkor

$$\overline{\lambda}(H) \leqslant \overline{\lambda}(H \cap N) + \overline{\lambda}(H \backslash N) \leqslant \overline{\lambda}(H) + \overline{\lambda}(N) = \overline{\lambda}(H),$$

tehát N jól vágja ketté a H halmazt.

Tétel

A nullmértékű halmazok $\mathcal{N}$ rendszere egy *σ-ideál*:

- $\varnothing \in \mathcal{N}$;
- $\mathcal{N}$ minden elemének minden részhalmaza is $\mathcal{N}$-beli;
- $\mathcal{N}$ zárt a megszámlálható unióra.

Tétel

$\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$.

Bizonyítás. Vegyünk egy kontinuum számosságú, nullmértékű halmazt, például a Cantor-halmazt. Ennek minden részhalmaza nullmértékű, tehát Lebesgue-mérhető. De ilyen részhalmazból $2^{\mathfrak{c}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ van; több, mint Borel-halmaz összesen.

Példa. $\mathbb{Q}$ *Lebesgue-mérhető, de nem Jordan-mérhető.*

6. előadás, 2023.03.16.

Tétel

Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető halmazt.

Bizonyítás. (A Vitali-konstrukció módosítása)

Ha A nem mérhető, akkor ő maga egy saját nem mérhető részhalmaza.

Legyen $A \in \mathcal{L}$ pozitív mértékű és mérhető. Feltehető, hogy A korlátos, mert ha A-nak minden korlátos részhalmaza nullmértékű, akkor minden n-re $B(0, n) \cap A$ is, így a mérték folytonossága miatt $\lambda(A \cap \mathbb{R}^p) = \lambda(A) = 0$. Így A-nak van pozitív mértékű korlátos részhalmaza.

Legyen $V \subset A$ olyan, hogy $\mathbb{Q}^p$ eltoltjából legfeljebb egy elemet tartalmaz, és akkor nem tartalmaz belőle elemet, ha A diszjunkt attól az eltolt halmaztól. (Más szóval, minden $r \in \mathbb{R}^p$ vektorra, ha a $(\mathbb{Q}^p + r) \cap A$ metszet nem üres, akkor kiválasztunk belőle egyetlen elemet.) Ekkor létezik $\mathbb{Q}^p$-nek olyan korlátos Q részhalmaza, hogy $V + Q$ lefedi A-t és Q végtelen.

Ha V mérhető, és $\lambda(V) > 0$, akkor $\lambda(V+Q) = \infty$, ami nem lehet, mert korlátos halmazok összege korlátos, és λ monotonitása miatt minden korlátos halmaz véges mértékű.

Ha $\lambda(V + Q) = 0$, akkor $\lambda(A) = 0$, ami szintén nem lehet. Így $V \notin \mathcal{L}$.

7. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származtó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. [Petruska, 61–63. o.]

Definíció (relatív külső mérték)

Legyen $X \neq \varnothing$ tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \in \mathcal{A}$ és $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

- A φ függvény *relatív külső mérték*, ha σ-szubadditív és $\varphi(\varnothing) = 0$.
- Ha φ relatív külső mérték és $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, akkor φ *külső mérték*.

Példák

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\varphi(H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } H \neq \varnothing \\ 0 & \text{ha } H = \varnothing \end{cases}$;
- $\mathcal{A}$ a Jordan-mérhető halmazok gyűrűje, φ a Jordan-térfogat. (Ehhez szükség van arra, hogy a Jordan-térfogat σ-szubadditív.)

Trivialitás

Minden relatív külső mérték monoton és szubadditív.

Bizonyítás. Ha φ relatív külső mérték, $A, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{M}$ és $A \subset B_1 \cup \ldots \cup B_n$, akkor

$$A \subset B_1 \cup \ldots \cup B_n \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots,$$

a σ-szubadditivitás miatt

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(B_1) + \ldots + \varphi(B_n) + \underbrace{\varphi(\varnothing) + \varphi(\varnothing) + \ldots}_{0},$$

tehát φ végesen szubadditív.

Az $n = 1$ esetben ez éppen a monotonitás.

Állítás

Minden mérték relatív külső mérték.

Bizonyítás. Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $H, A_1, A_2 ... \in \mathcal{M}$, hogy $H \subset \bigcup A_k$.

A $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ halmazokkal

$$\mu(H) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definíció (asszociált külső mérték)

Tegyük fel hogy $X \neq \varnothing$ tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\varnothing \in \mathcal{A}$, és $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ olyan, hogy $\alpha(\varnothing) = 0$.

Legyen $H \subset X$ esetén

$$\varphi_\alpha(H) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k) : A_k \in \mathcal{A}, H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\};$$

ha H nem fedhető le megszámlálható sok $\mathcal{A}$-beli halmazzal, akkor $\varphi_\alpha(H) = \infty$ (mert $\inf \varnothing = +\infty$).

Az így definiált $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ függvény *az α-hoz asszociált külső mérték*.

Példák

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\alpha(H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } H \neq \varnothing \\ 0 & \text{ha } H = \varnothing \end{cases}$. Ekkor $\varphi_\alpha = \alpha$.
- $\mathcal{A}$ a p-dimenziós téglák rendszere, és α a térfogat. Ekkor φ_α a külső Lebesgue-mérték.
- $\mathcal{A}$ a Jordan-mérhető halmazok gyűrűje, α a Jordan-térfogat. Ekkor is φ_α a külső Lebesgue-mérték.

Állítás

φ_α külső mérték.

Bizonyítás. $\varphi_\alpha(\varnothing) = 0$ **triviális**🙈; a σ-szubadditivitást kell bizonyítani.

Tegyük fel, hogy $H, F_1, F_2, \ldots \subset X$ és $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; Azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\varphi_\alpha(H) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(F_n).$$

Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(F_n) = \infty$, akkor az egyenlőtlenség **triviális**🙈; a továbbiakban feltesszük, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(F_n)$ véges, ekkor persze mindegyik $\varphi_\alpha(F_n)$ véges.

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Mindegyik F_n-et fedjük le $\mathcal{A}$-beli halmazokkal $\frac{\varepsilon}{2^n}$ pontossággal, vagyis vegyünk olyan $A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokat, amelyekre $F_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{nk}) < \varphi_\alpha(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Az A_{nk} halmazok együttesen a H-t is lefedik, ezért

$$\varphi_\alpha(H) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{nk}) \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_\alpha(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(F_n) + \varepsilon.$$

A $\varepsilon \to +0$ határátmenettel kész vagyunk.

7.1 Lemma

Ha φ relatív külső mérték valamilyen $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ halmazrendszeren, amire $A \in \mathcal{A}$ esetén $\varphi(A) \leqslant \alpha(A)$, akkor bármely $H \in \mathcal{B}$ halmazra $\varphi(H) \leqslant \varphi_\alpha(H)$.
Vagyis, az α-nál nem nagyobb relatív külső mértékek között φ_α maximális.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $H \in \mathcal{B}$ halmazt; azt kell igazolnunk, hogy $\varphi(H) \leqslant \varphi_\alpha(H)$. Ha $\varphi_\alpha(H) = \infty$, akkor ez **triviális**🙈. A továbbiakban feltesszük, hogy $\varphi_\alpha(H)$ véges.

Bármely ε-hoz vannak olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok, hogy $H \subset \bigcup A_n$ és $\sum \alpha(A_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon$; ekkor

$$\varphi(H) \overset{\varphi\ \sigma\text{-szubadd.}}{\leqslant} \sum \varphi(A_n) \overset{\varphi \leqslant \alpha}{\leqslant} \sum \alpha(A_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon;$$

Az $\varepsilon \to +0$ határátmenttel megapjuk, hogy $\varphi(H) \leqslant \varphi_\alpha(H)$

Példák

Az előbbi példákban az asszociált külső mértékek: ő maga, illetve a külső Lebesgue-mérték.

Definíció (Külső mérték szerint mérhető halmaz)

Legyen φ külső mérték az X alaphalmazon. Az $A \subset X$ halmaz *φ szerint mérhető* vagy *φ-mérhető* vagy csak *mérhető*, ha

$$\forall H \subset X \quad \varphi(H) = \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A).$$

A φ-mérhető halmazok rendszere $\mathcal{M}_\varphi$.

Megjegyzés

A szubadditivitás miatt elég azt előírni, hogy

$$\varphi(H) \geqslant \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A).$$

Ez **triviális**🙈 akkor, ha $\varphi(H) = \infty$, tehát elég véges külső mértékű H-ra ellenőrizni.

Tétel

- A fenti jelölésekkel $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra, és $(X, \mathcal{M}_\varphi, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi})$ mértéktér.
- Sőt, tetszőleges $Y \subset X$ halmazra φ mérték az $\mathcal{M}_\varphi|_Y$ σ-algebrán is.

Bizonyítás. *1. állítás: Az X és $\varnothing$ mérhető, avagy $X, \varnothing \in \mathcal{M}_\varphi$.*

Bármely $H \subset X$ halmazra

$$\varphi(H \cap \varnothing) + \varphi(H \backslash \varnothing) = \varphi(\varnothing) + \varphi(H) = 0 + \varphi(H) = \varphi(H);$$
$$\varphi(H \cap X) + \varphi(H \backslash X) = \varphi(H) + \varphi(\varnothing) = \varphi(H) + 0 = \varphi(H).$$

(Most használtuk, hogy $\varphi(\varnothing) = 0$.)

2. állítás: Az $\mathcal{M}_\varphi$ algebra, azaz ha A, B mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \backslash B$ is mérhető.

Legyen $H \subset X$ tetszőleges; azt akarjuk ellenőrizni, hogy a H-t az $A \cup B$, az $A \cap B$ és az $A \backslash B$ is jól vágja ketté.

Az A, B halmazok a H-t négy részre osztják: $H = H_0 \cup H_a \cup H_b \cup H_{ab}$ (az indexek azt jelzik, hogy az adott részhalmaz az A és B közül melyiknek része: $H_0 = H \backslash (A \cup B)$, $H_a = (H \cap A) \backslash B$, $H_b = (H \cap B) \backslash A$, $H_{ab} = H \cap A \cap B$). Az A és B mérhetősége miatt

$$\begin{aligned}
\varphi(H) &= \varphi(H \cap A) + \varphi(H \backslash A) = \\
&= \Big(\varphi\big((H \cap A) \cap B\big) + \varphi\big((H \cap A) \backslash B\big)\Big) + \Big(\varphi\big((H \backslash A) \cap B\big) + \varphi\big((H \backslash A) \backslash B\big)\Big) = \\
&= \Big(\varphi(H_{ab}) + \varphi(H_a)\Big) + \Big(\varphi(H_b) + \varphi(H_0)\Big).
\end{aligned}$$

Átcsoportosítva és a szubbaditivitást felhasználva

$$\begin{aligned}\varphi(H) &\leqslant \varphi(H\cap(A\cup B))+\varphi(H\backslash(A\cup B))\leqslant\\ &\leqslant \Big(\varphi(H_{ab})+\varphi(H_a)+\varphi(H_b)\Big)+\varphi(H_0)=\varphi(H);\\ \varphi(H) &\leqslant \varphi(H\cap(A\cap B))+\varphi(H\backslash(A\cap B))\leqslant\\ &\leqslant \varphi(H_{ab})+\Big(\varphi(H_a)+\varphi(H_b)+\varphi(H_0)\Big)=\varphi(H);\\ \varphi(H) &\leqslant \varphi(H\cap(A\backslash B))+\varphi(H\backslash(A\backslash B))\leqslant\\ &\leqslant \varphi(H_a)+\Big(\varphi(H_b)+\varphi(H_{ab})+\varphi(H_0)\Big)=\varphi(H).\end{aligned}$$

Látjuk, hogy mindenhol egyenlőség van, tehát $A\cup B$, $A\cap B$ és $A\backslash B$ is jól vágja ketté a H halmazt.

3. állítás: Bármely $Y\subset X$ esetén φ additív $\mathcal{M}_\varphi|_Y$-n.

Ha A,B mérhetők, és $A\cap Y$ és $B\cap Y$ diszjunktak, akkor A-val vágjuk ketté az $(A\cup B)\cap Y$ halmazt:

$$\varphi\big((A\cup B)\cap Y\big)=\varphi\Big(\big((A\cup B)\cap Y\big)\cap A\Big)+\varphi\Big(\big((A\cup B)\cap Y\big)\backslash A\Big)=\varphi\big(A\cap Y\big)+\varphi\big(B\cap Y\big).$$

Indukcióval akárhány halmazra is igaz.

4. állítás: $\mathcal{M}_\varphi$ σ-algebra.

A megszámlálható sok halmaz unióját kicserélhetjük páronként diszjunkt halmazok uniójára: legyen $B_i=A_i\backslash\bigcup\limits_{j<i}A_j$, ekkor $\bigcup_{i=1}^\infty A_i=\bigsqcup_{i=1}^\infty B_i$.

Legyen $U_n=B_1\sqcup\ldots\sqcup B_n$ és $U_\infty=\bigsqcup\limits_{i=1}^\infty B_i=\bigcup\limits_{i=1}^\infty A_i$; azt akarjuk igazolni, hogy U_∞ mérhető.

$$\begin{aligned}\varphi(H)&\overset{U_n\text{ mérhető}}{=}\varphi\big(H\cap U_n\big)+\varphi\big(H\backslash U_n\big)\overset{\varphi\text{ monoton}}{\geqslant}\varphi\big(H\cap U_n\big)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big)\overset{U_n=\sqcup B_i}{=}\\ &=\varphi\Bigg(\bigsqcup_{i=1}^n(H\cap B_i)\Bigg)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big)\overset{\varphi\text{ additív }\mathcal{M}_\varphi|_H\text{-n}}{=}\sum_{i=1}^n\varphi(H\cap B_i)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big).\end{aligned}$$

Most $n\to\infty$, majd σ-szubadditivás:

$$\begin{aligned}\varphi(H)&\geqslant\sum_{i=1}^\infty\varphi(H\cap B_i)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big)\overset{\varphi\ \sigma\text{-szubadditív}}{\geqslant}\\ &\geqslant\varphi\Bigg(\bigsqcup_{i=1}^\infty(H\cap B_i)\Bigg)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big)=\varphi\big(H\cap U_\infty\big)+\varphi\big(H\backslash U_\infty\big).\end{aligned}$$

Tehát U_∞ jól vágja ketté H-t.

5. állítás: φ σ-additív $\mathcal{M}_\varphi|_Y$-n.

Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}_\varphi$, és az $A_i \cap Y$ halmazok diszjunktak.

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i \cap Y) \overset{\varphi \text{ additív } \mathcal{M}_\varphi|_Y\text{-on}}{=} \varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap Y)\right) \overset{\varphi \text{ monoton}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap Y)\right) \overset{\sigma\text{-szubadditív}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i \cap Y).$$

Most $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i \cap Y) \leqslant \varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap Y)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i \cap Y).$$

Tehát $\varphi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap Y)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i \cap Y)$.

8. Teljes mértékterek

Definíció (nullmértékű halmaz)

Legyen φ külső mérték az X alaphalmazon. Az $N \subset X$ halmaz *φ-nullmértékű*, ha $\varphi(N) = 0$.

Állítás

A φ-nullmértékű halmazok φ-mérhetőek, avagy $\varphi(N) = 0$ esetén $N \in \mathcal{M}_\varphi$.

Bizonyítás. Bármely $H \subset X$-re

$$\varphi(H \cap N) + \varphi(H \backslash N) \leqslant 0 + \varphi(H).$$

Definíció (teljes mértéktér)

Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér *teljes*, ha a μ-nullmértékű halmazok részhalmazai is mérhetőek, tehát bármely $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$, $Z \subset N$, esetén $Z \in \mathcal{M}$. (A monotonitás miatt **triviális**🙊, hogy $\mu(Z) = 0$.)

Következmény

Bármely $Y \subset X$ halmazra $(Y, \mathcal{M}_\varphi|_Y, \varphi|_{\mathcal{M}_\varphi|_Y})$ teljes mértéktér.

Következmény

A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen a $\overline{\lambda}$ egy teljes mérték.

7. előadás, 2023.03.21.

Tétel

Minden mértéktér teljessé tehető, vagyis:
Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, akkor

- létezik egy egyértelmű minimális $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra
- és egy szintén egyértelmű $\mu^* : \mathcal{M}^* \to [0, \infty]$ mérték
- úgy hogy $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$, $\mu^*_{|\mathcal{M}} = \mu$ és $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ teljes.

Bizonyítás. 1. Legyen

$$\mathcal{M}^* = \{A = M \cup Z : \ M \in \mathcal{M};\ \exists N \in \mathcal{M}\ \mu(N) = 0,\ Z \subset N\},$$

tehát azon A-k halmaza, amelyek előállnak mint egy M mérhető halmaz plusz valami, nullmértékű halmazzal lefedhető "zaj". Az ilyen A halmazoknak mindenképpen benne kell lennie a keresett σ-algebrában.

A bizonyítás során M, M_i mindig mérhető, N és N_i nullmértékű mérhető, Z és Z_i az N, illetve az N_i valamilyen részhalmazát fogja jelenteni, $A = M \cup Z$, és $A_i = M_i \cup Z_i$.

A $\mathcal{M}^*$ rendszer egy σ-algebra, mert

- $\emptyset, X \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^*$;
- zárt a komplementumképzésre: $X \backslash (M \cup Z) = (X \backslash (M \cup N)) \cup (N \backslash M \backslash Z) \in \mathcal{M}^*$;
- zárt a megszámálható unióra: ha $M_1, M_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mérhetők, $N_1, N_2, \ldots \in \mathcal{M}$ nullmértékűek, és $Z_i \subset N_i$, akkor $\bigcup (M_i \cup Z_i) = \left(\bigcup M_i\right) \cup \left(\bigcup Z_i\right) \in \mathcal{M}^*$; itt $\bigcup M_i$ mérhető, és $\bigcup Z_i$ része a nullmértékű $\bigcup N_i$-nek.

2. Legyen $\mu^*(M \cup Z) = \mu(M)$; csak ez a függvény lehetséges, mert

$$\mu(M) = \mu^*(M) \leqslant \mu^*(M \cup Z) \leqslant \mu^*(M \cup N) \leqslant \mu^*(M) + \mu^*(N) = \mu(M) + \mu(N) = \mu(M).$$

Szükséges az, hogy ez az érték jóldefiniált legyen. Legyen $A \in \mathcal{M}^*$, M_1, N_1, Z_1 és M_2, N_2, Z_2 a definíció szerinti halmazok, hogy $M_1 \cup Z_1 = M_2 \cup Z_2 = A$. Ekkor

$$M_1 \backslash M_2 \subset A \backslash M_2 \subset Z_2 \subset N_2, \quad \text{ezért} \quad \mu(M_1 \backslash M_2) = 0;$$

$$M_1 \cap M_2 \subset M_1 = (M_1 \cap M_2) \sqcup (M_1 \backslash M_2)$$

$$\mu(M_1 \cap M_2) \leqslant \mu(M_1) \leqslant \mu(M_1 \cap M_2) + \underbrace{\mu(M_1 \backslash M_2)}_{0},$$

amiből $\mu(M_1) = \mu(M_1 \cap M_2)$.

Ugyanígy, $\mu(M_2) = \mu(M_1 \cap M_2)$, tehát $\mu(M_1) = \mu(M_2)$.

3. A μ^* függvény σ-addititív: Legyenek $A_1 = M_1 \cup Z_1, A_2 = M_2 \cup Z_2, \ldots \in \mathcal{M}^*$ páronként diszjunkt halmazok, ahol $M_i \in \mathcal{M}$ és Z_i lefedhető valamilyen $N_i \in \mathcal{M}$ nullmértékű halmazzal. Az $\bigcup Z_i$ halmazt lefedi a nullmértékű $\bigcup N_i$, ezért

$$\mu^*\Big(\bigsqcup A_i\Big) = \mu^*\bigg(\Big(\bigsqcup M_i\Big) \cup \Big(\bigcup Z_i\Big)\bigg) = \mu\Big(\bigsqcup M_i\Big) = \sum \mu(M_i) = \sum \mu^*(A_i).$$

Most már tudjuk, hogy $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ mértéktér.

4. A $(X, \mathcal{M}^*, \mu^*)$ mértéktér teljes: Tegyük fel, hogy $A = M \cup Z \in \mathcal{M}^*$ és $\mu^*(A) = 0$, tehát A egy μ^*-nullmértékű halmaz, és $B \subset A$. Az kell, hogy $B \in \mathcal{M}^*$.

Vegyük észre, hogy $\mu(M) = \mu^*(A) = 0$, tehát B felírható $B = \varnothing \cup B$ alakban, ahol $\varnothing \in \mathcal{M}$ és B lefedhető a μ-nullmértékű $(M \cup N)$ halmazzal, tehát $B \in \mathcal{M}^*$.

9. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ térben. [Petruska, 64–66. o.]

Kérdés

- Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^p$-ben minden Jordan-mérhető halmaz Lebesgue-mérhető, és a Lebesgue-mértékük ugyanaz, mint a Jordan-mértékük?
- Általában, igaz-e, hogy ha α relatív külső mérték az $\mathcal{A}$ rendszeren, akkor $\mathcal{A}$ elemei mérhetők φ_α szerint, vagyis $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$, és bármely $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\varphi_\alpha(A) = \alpha(A)$?

Az, hogy $\varphi_\alpha(A) = \alpha(A)$, következik abból, hogy az α függvény relatív külső mérték.

Példa

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\alpha(H) = \begin{cases} 1 & \text{ha } H \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha } H = \emptyset, \end{cases}$
- $\varphi_\alpha = \alpha$.
- Ha $a \in A$ és $b \notin A$, akkor
  - A rosszul vágja ketté a $H = \{a, b\}$ halmazt:
  $$\alpha(H) = 1, \qquad \alpha(H \cap A) + \alpha(H \backslash A) = 1 + 1.$$
  - Az alaphalmazt is rosszul vágja ketté:
  $$\alpha(X) = 1, \qquad \alpha(X \cap A) + \alpha(X \backslash A) = 1 + 1.$$
- Csak $\emptyset$ és X mérhető.
- Hiányzik az additivitás.
- *Kössük ki, hogy α additív a $\mathcal{A}$ rendszeren.*

Példa

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\varnothing\} \cup \{(c, \infty) : c \in \mathbb{R}\}$, $\alpha(\varnothing) = 0; \qquad \alpha((c, \infty)) = 1.$

- $$\varphi_\alpha(A) = \begin{cases} 0 & \text{ha } A = \varnothing \\ 1 & \text{ha } A \neq \varnothing \text{, de alulról korlátos} \\ \infty & \text{ha } A \text{ nem korlátos alulról} \end{cases}$$

- Ha $a \in A$ és $b \in X \setminus A$, akkor A rosszul vágja ketté a $H = \{a, b\}$ halmazt:
$$\varphi_\alpha(H) = 1, \qquad \varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) = 1 + 1.$$

- Most is csak két mérhető halmaz van.

- Az additivitás igaz, csak semmitmondó: nincsenek nemüres, diszjunkt halmazaink.

- Van additivitás, de az $\mathcal{A}$ halmazrendszer túl sovány.

- *Ki fogjuk kötni, hogy a fedésre használt $\mathcal{A}$ halmazrendszer félgyűrű, és ezen az α függvény additív.*

Tétel

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,

- α relatív külső mérték, továbbá
- α még additív is.

Ekkor $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$ és $\varphi_\alpha|_{\mathcal{A}} = \alpha$, vagyis

- Minden $\mathcal{A}$-beli halmaz mérhető φ_α szerint, és
- Bármely $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\varphi_\alpha(A) = \alpha(A)$.

Bizonyítás. A σ-szubbadditivitás miatt **triviális**🙊, hogy $\varphi_\alpha|_{\mathcal{A}} = \alpha$; azt kell igazolni, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ mérhető. Legyen tehát $A \in \mathcal{A}$ és $H \subset X$ tetszőleges; a célunk $\varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \setminus A) \leqslant \varphi_\alpha(H)$. Ha $\varphi_\alpha(H) = \infty$, akkor ez **triviális**🙊; feltehetjük tehát, hogy $\varphi_\alpha(H)$ véges.

Vegyünk egy tetszőleges ε-t, és ehhez olyan $B_1, B_2 \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokat, amelyek úgy fedik H-t, hogy $\sum \alpha(B_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon$.

Mindegyik B_n-re $B_n \cap A \in \mathcal{A}$, és a $B_n \backslash A$ halmaz felbomlik páronként diszjunkt $C_{n1}, \dots, C_{n,k_n} \in \mathcal{A}$ elemek uniójára: $B_n = (B_n \cap A) \sqcup \underbrace{C_{n1} \sqcup \dots \sqcup C_{n,k_n}}_{B_n \backslash A}$. Az additivitás miatt

$$\alpha(B_n \cap A) + \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}) \overset{\alpha \text{ additív}}{=} \alpha(B_n),$$

$$\varphi_\alpha(H \cap A) \overset{\varphi_\alpha \text{ def}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n \cap A),$$

$$\varphi_\alpha(H \backslash A) \overset{\varphi_\alpha\ s\sigma\text{-szubadd}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(B_n \backslash A) \overset{\varphi_\alpha \text{ def}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}) + \alpha(\varnothing) + \alpha(\varnothing) + \dots \right),$$

$$\varphi_\alpha(H \cap A) + \varphi_\alpha(H \backslash A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha(B_n \cap A) + \sum_{i=1}^{k_n} \alpha(C_{ni}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) < \varphi_\alpha(H) + \varepsilon.$$

Végül $\varepsilon \to 0$ és kész.

Kérdés

A fenti tétel kiterjeszti az α halmazfüggvényt mértékként egy, az $\mathcal{A}$-t tartalmazó σ-algebrára. Igaz-e, hogy a kiterjesztés egyértelmű?

Általában nem igaz:

Példa

Álljon $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}$ félig nyílt intervallumaiból, és legyen $\alpha(A) = \infty$ ha A nemüres. Ekkor α kiterjeszthető a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ halmazrendszerre, de a kiterjesztés nem egyértelmű. Lehetséges kiterjesztés például a konstans ∞ és a számlálómérték is.

Viszont ha az α nem túl nagy, az egész tér felbomlik megszámálható sok, véges mértékű darabra (mint ahogy $\mathbb{R}^p$ felbomlik megszámlálható sok korlátos téglára), akkor már a kiterjesztés egyértelmű.

Definíció (σ-végesség)

- Legyen X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ és $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték. Azt mondjuk, hogy a $H \subset X$ halmaz *σ-véges az α szerint*, ha léteznek olyan $A_1, A_2 ... \in \mathcal{A}$ halmazok, amelyekre mindegyik $\alpha(A_n)$ véges, és

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

- Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, iletve a μ mérték *σ-véges*, ha X a μ szerint σ-véges, avagy felbontató megszámlálható sok véges mértékű halmazra.

Példák

- $\mathbb{R}^p$ σ-véges a Jordan-mérték szerint.
- $\mathbb{R}$ nem σ-véges a számosságmérték szerint. A számosságmérték szerint σ-véges halmazok a megszámlálható halmazok.

9.1 Tétel

Legyen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ félgyűrű, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ relatív külső mérték, ami még additív is, *és tegyük fel, hogy X σ-véges*.
Ekkor bármely $\mathcal{M}$ olyan σ-algebrára, amelyre $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\varphi_\alpha}$, az α egyértelműen terjeszthető ki $\mathcal{M}$-re, azaz ha μ mérték $\mathcal{M}$-en és $\mu_{|\mathcal{A}} = \alpha$, akkor $\mu = \varphi_\alpha|_{\mathcal{M}}$.

Bizonyítás. Az X olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok uniója, amelyekre minden $\alpha(A_n)$ véges. A **??** lemma miatt ezeket kicserélhetjük olyan, páronként diszjunkt $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazokra, amelyek uniója szintén X, és mindegyik B_k részhalmaza valamelyik A_n-nek, így $\alpha(B_k) \leqslant \alpha(A_n) < \infty$.

A 7 lemma miatt $\mu \leqslant \varphi_\alpha$, így bármely $H \in \mathcal{M}$ halmazra

$$\alpha(B_n) = \mu(B_n) = \mu(B_n \cap H) + \mu(B_n \setminus H) \leqslant \varphi_\alpha(B_n \cap H) + \varphi_\alpha(B_n \setminus H) = \varphi_\alpha(B_n) = \alpha(B_n),$$

és itt minden véges volt, tehát például $\mu(H \cap B_n) = \varphi_\alpha(H \cap B_n)$. Összegezve

$$\mu(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(H \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_\alpha(H \cap B_n) = \varphi_\alpha(H).$$

Következmény (Caratheodory-féle mértékkiterjesztési tétel (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, 1873–1950))

Legyen X tetszőleges alaphalmaz, $\mathcal{A}$ félgyűrű $\mathcal{P}(X)$-en, $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ additív és σ-szubadditív és $\alpha(\emptyset) = 0$. Ekkor

- Az α függvény kiterjeszthető az $\mathcal{A}$ által generált σ-algebrán mértékké.
- Ha X σ-véges, akkor a kiterjesztés egyértelmű.

A Lebesgue-mérték befejezése

Az előbbi tételeket alkalmazhatjuk a Jordan-mérhető halmazok gyűrűjére vagy a $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú félig nyílt téglák félgyűrűjére.

Lemma

- Minden dimenzióban, a félig nyílt téglák félgyűrűjén a Jordan-mérték additív relatív külső mérték.
- Minden dimenzióban, a Jordan-mérhető halmazok gyűrűjén a Jordan-térfogat additív relatív külső mérték.

Bizonyítás. A Jordan-mérték additivitását tudjuk.

Tegyük fel, hogy $A, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ és $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$; a σ-szubdadditivitáshoz azt akarjuk igazolni, hogy $t(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} t(B_i)$.

Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Elég finom kockázással az A belső kockái egy olyan $K \subset A$ kompakt halmazt akotnak, amelyre $t(K) > t(A) - \varepsilon$. Mindegyik B_i-hez vegyük a tér egy kellően finom kockázását úgy, hogy a fedő kockák össztérfogata kisebb legyen, mint $t(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. A fedő kockákat kicsit meghízlalva kaphatunk olyan G_i Jordan-mérhető nyílt halmazt, amelyre $B_i \subset G_i$ és $t(G_i) < t(B_i) + 2\frac{\varepsilon}{2^i}$.

A kompaktság miatt a K halmazt véges sok G_i, mondjuk az első n darab is lefedi. Ezek után a Jordan- mérték szubadditivitása miatt

$$t(A) - \varepsilon < t(K) \leqslant t(G_1 \cup \ldots \cup G_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t(G_i) < \sum_{i=1}^{n} \left(t(B_i) + 2\frac{\varepsilon}{2^i} \right) < \sum_{i=1}^{\infty} t(B_i) + 2\varepsilon.$$

Most $\varepsilon \to +0$-ból $t(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} t(B_i)$.

Téglákra a bizonyítás ugyanez, de egyszerűbb: $A, B_1, B_2, \ldots$ félig nyílt téglák;

az A-t egy nála kisebb K zárt téglára cseréljük, a B_i halmazt pedig egy nála bővebb nyílt téglára.

Következmény

- $\mathcal{J}_p \subset \mathcal{L}_p$, avagy a Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetőek is.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{L}_p$, avagy minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető. (A félig nyílt téglák Borel-halmazok, és generálják $\mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$-t.)
- $t_p = \lambda_p|_{\mathcal{J}_p}$, vagyis a Lebesgue-mérték a Jordan-mérték kiterjesztése.
- A Lebesgue-mérték teljes.
- A $\mathcal{L}_p$ σ-algebrán a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásinvariáns mérték.
- Az $\mathbb{R}^p$-n a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásinvariáns Borel-mérték.

10. Lebesgue–Stieltjes mértékek 1-dimenzióban

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték eloszlásfüggvénye. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue–Stieltjes mértékek. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue–Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra. [Petruska, 69–75. o.]

Most egy darabig egy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum lesz a világ (az I lehet félegyenes vagy az egész $\mathbb{R}$ is), és a $(I, \mathcal{B}(I), \mu)$ lokálisan véges Borel-mértékeket vizsgáljuk.

Definíció (Borel-mérték)

Ha X topologikus tér, $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ mérték,akkor az $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy *Borel-mértéktér* és μ egy *Borel-mérték*.
Vannak, akik a $\mathcal{B}(X)$-nél bővebb σ-algebrákon értelmezett mértékeket is "Borel-mértéknek" nevezik.

Definíció (lokálisan véges Borel-mérték)

Az $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), \mu)$ mértéktér *lokálisan véges*, ha

(a) Minden pontnak van véges mértékű környezete, azaz

$$\forall a \in \mathbb{R}^p \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subset \mathbb{R}^p, \quad \mu(B(a, r)) < \infty;$$

(b) Minden kompakt $K \subset \mathbb{R}^p$ halmaz mértéke véges.

Ez a kettő ekvivens; (b) $\Longrightarrow$ (a) **triviális**🙊, mert minden pontnak van kompakt környezete; (a) $\Longrightarrow$ (b) azért, mert K minden pontja körül vehetünk egy-egy véges mértékű környezetet, és a kompaktság miatt ezek közül véges sok is fedi K-t.

Definíció (intervallumfüggvény eloszlásfüggvénye)

Legyen $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \big\{[a, b) : a, b \in I, a < b\big\}$ és $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vagy $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.
Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az α halmazfüggvénynek *eloszlásfüggvénye*, ha bármely $[a, b)$ esetén

$$\alpha\big([a, b)\big) = F(b) - F(a).$$

8. előadás, 2023.03.23.

Lemma

- Az α-nak akkor és csak akkor létezik eloszlásfüggvénye, ha additív.
- Speciálisan, minden lokálisan véges mértéknek létezik eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás.

- $\Rightarrow$: Ha van eloszlásfüggvény, és $[x_0, x_1) \sqcup [x_1, x_2) \sqcup \ldots \sqcup [x_{n-1}, x_n) = [x_0, x_n)$, akkor
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha\big([x_{i-1}, x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = F(x_n) - F(x_0) = \alpha\big([x_n, x_0)\big).$$
- $\Leftarrow$: Ha α additív, akkor válasszunk egy $x_0 \in I$ kezdőpontot, és legyen
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = x_0 \\ \alpha([x_0, x)) & \text{ha } x > x_0 \\ -\alpha([x, x_0)) & \text{ha } x < x_0. \end{cases}$$
  - Ha $a < b < x_0$, akkor $\alpha\big([a, b)\big) = \alpha\big([a, x_0)\big) - \alpha\big([b, x_0)\big) = (-F(a)) - (-F(b))$.
  - Ha $a < x_0 \leqslant b$, akkor $\alpha\big([a, b)\big) = \alpha\big([a, x_0)\big) + \alpha\big([x_0, b)\big) = (-F(a)) + F(b)$.
  - Ha $x_0 \leqslant a < b$, akkor $\alpha\big([a, b)\big) = \alpha\big([x_0, b)\big) - \alpha\big([x_0, a)\big) = F(b) - F(a)$.

Lemma

(a) Ha F a $(I, \mathcal{B}(I), \mu)$ mértéknek eloszlásfüggvénye, akkor F monoton nő és balról folytonos.

(b) A további intervallumtípusok mértéke F-fel kifejezve
$$\begin{aligned} \mu\big([a, b]\big) &= F(b+0) - F(a) = F(b+0) - F(a-0), \quad \text{speciálisan} \\ \mu\big(\{a\}\big) &= F(a+0) - F(a) = F(a+0) - F(a-0); \\ \mu\big((a, b)\big) &= F(b) - F(a+0) = F(b-0) - F(a+0), \\ \mu\big((a, b]\big) &= F(b+0) - F(a+0). \end{aligned}$$

Bizonyítás.

- Bármely $a < b$ esetén $F(b(-F(a) = \mu\big([a,b)\big) \geqslant 0$, tehát $F(a) \leqslant F(b)$.
- Bármely $x_n \nearrow a$ sorozatra, az $[x_n, a)$ intervallumok metszete $\varnothing$. A mérték folytonossága miatt

  $$0 = \mu(\varnothing) = \mu\Big(\bigcap [x_n, a)\Big) = \lim \mu\big([x_n, a)\big) = \lim \big(F(a) - F(x_n)\big) = F(a) - F(a-0),$$

  tehát $F(a-0) = F(a)$.
- Bármely $x_n \searrow a$ sorozatra az $[a, x_n)$ intervallumok metszete az $\{a\}$ pont.

  $$\mu\big(\{a\}\big) = \mu\Big(\bigcap [a, x_n)\Big) = \lim \mu\Big([a, x_n)\Big) = \lim \Big(F(x_n) - F(a)\Big) = F(a+0) - F(a).$$

- $\mu\Big([a,b]\Big) = \mu\Big([a,b)\Big) + \mu\Big(\{b\}\Big) = \big(F(b) - F(a)\big) + \big(F(b+0) - F(b)\big) = F(b+0) - F(a)$.
- $\mu\Big((a,b)\Big) = \mu\Big([a,b)\Big) - \mu\Big(\{a\}\Big) = \big(F(b) - F(a)\big) - \big(F(a+0) - F(a)\big) = F(b) - F(a+0)$.

Kérdés (Megfordítás?)

Van egy monoton növő $F : I \to \mathbb{R}$ függvényünk. Létezik-e olyan μ Borel-mérték, amelynek F eloszlásfüggvénye?

- A megfordítás ezek után olyasmi lenne, hogy kapunk egy monoton növő $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt, a megváltozásából készítünk egy additív intervallumfüggvényt, és ezt az additív függvényt kiterjesztjük mértékké. Ha F nem minden pontban folytonos balról, akkor baj van. Ezen többféleképpen segíthetünk. Két fontos lehetőséget érdemes megemlíteni:
  - Kiköthetjük, hogy csak balról folytonos F-et engedünk meg. Vagy:
  - Az intervallumaink $\mathcal{A}$ félgyűrűjében nem engedünk meg minden végpontot.
    - Csak az olyan végpontokat engedjük meg, ahol F balról folytonos. Vagy:
    - Csak az olyan végpontokat engedjük meg, ahol F folytonos.
  - Szerencsére egy monoton függvénynek legfeljebb csak megszámlálható sok szakadási pontja lehet (mert minden szakadásnál átugrik racionális számokat, és egy racionális számot legfeljebb csak egyszer ugorhat át), tehát F folytonossági pontjai sűrűn vannak I-ben.

- Mostantól kezdve $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő.
- $V \subset I$ egy sűrű halmaz (a megengedett **V**égpontok halmaza).
- A V minden pontjában F balról folytonos.
- $\mathcal{A} = \{\varnothing\} \cup \big\{[a, b) : a, b \in V, a < b\big\}$ (ami félgyűrű),
- $\alpha(\varnothing) = 0$ és $\alpha([a, b)) = F(b) - F(a)$.

Lemma

Legyen $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, $V \subset I$ sűrű halmaz úgy, hogy V minden pontjában F balról folytonos,
$\mathcal{A} = \{\varnothing\} \cup \{[a,b) : a,b \in V, a < b\}$ a félig nyílt intervallumok félgyűrűje,
$\alpha(\varnothing) = 0$ és $\alpha([a,b)) = F(b) - F(a)$.

Ekkor az α halmazfüggvény additív relatív külső mérték.

Bizonyítás.

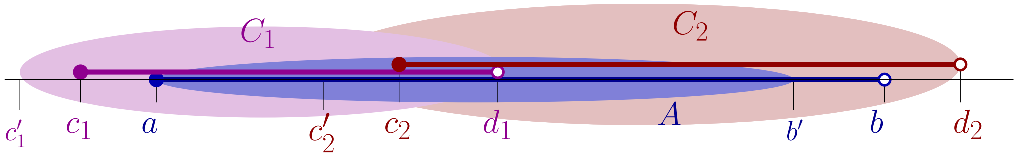
- Az trivi, hogy α additív.
- Megmutatjuk, hogy α szubadditív. Tegyük fel, hogy az $A = [a,b)$ intervallumot lefedik a $C_i = [c_i, d_i)$ $(i = 1, 2, \dots n)$ intervallumok; az kell, hogy $\alpha(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha(C_i)$.
- Az A intervallumot a c_i, d_i pontok kis félig nyílt intervallumokra osztják: $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$.
- Minden $j = 1, 2, \dots, k$-ra legyen $\chi(i,j) = 1$, ha $A_j \subset C_i$; egyébként $A_j \cap C_i = \varnothing$ és $\chi(i,j) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\Big(C_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{k} A_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\Big(\bigsqcup_{j=1}^{k} (C_i \cap A_j)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha(\underbrace{C_i \cap A_j}_{A_j \text{ vagy } \varnothing})\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} \chi(i,j) \cdot \alpha(A_j)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{n} \chi(i,j)\Big) \cdot \alpha(A_j) \geqslant \sum_{j=1}^{k} 1 \cdot \alpha(A_j) = \alpha(A).$$

- Most megmutatjuk, hogy α σ-szubadditív.
- Tegyük fel, hogy az $A = [a,b) \in \mathcal{A}$ intervallumot lefedik a $C_i = [c_i, d_i) \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \dots)$ intervallumok; azt kell igazolnunk, hogy $\alpha(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha(C_i)$.
- Terv: Az $A = [a,b)$ halmazt egy picit kisebb, de kompakt $[a,b']$ intervallumra szűkítjük, a $C_i = [c_i, d_i)$ fedő halmazokat pedig picit bővebb (c_i', d_i), nyílt intervallumokra. Utána a kompaktság miatt véges sok C_i is lefed, és működik a szubadditivitás.



- Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t.
- A $b' \in A \cap V$ megengedett végpontot úgy választjuk, hogy $\alpha\big([a,b')\big) > \alpha\big([a,b)\big) - \varepsilon$, vagyis $F(b') > F(b) - \varepsilon$; ilyen b' létezik, mert F balról folytonos b-ben.
- A $c_i' < c_i$ megengedett végpontot úgy választjuk, hogy $\alpha\big([c_i', d_i)\big) < \alpha\big([c_i, d_i)\big) + \dfrac{\varepsilon}{2^i}$, vagyis $F(c_i') > F(c_i) - \dfrac{\varepsilon}{2^i}$; ilyen C_i' is létezik.
- Tudjuk, hogy
$$[a,b'] \subset [a,b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[c_i, d_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(c_i', d_i).$$
- az $[a,b']$ intervallum kompakt, ezért lefedi az unióból véges sok nyílt (c_i', d_i) is, mondjuk az első n darab.

$$[a,b') \subset \quad [a,b'] \subset \bigcup_{i=1}^{n}(c_i', d_i) \quad \subset \bigcup_{i=1}^{n}[c_i', d_i).$$

$$\alpha(A) - \varepsilon < \alpha\big([a,b')\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha\big([c_i', d_i)\big) < \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) < \sum_{i=1}^{\infty}\alpha(C_i) + \varepsilon.$$

- Végül $\varepsilon \to 0$, kész.

Következmény

Az α additív és relatív külső mérték, I σ-véges, és az $\mathcal{A}$ által generált σ-algebra $\mathcal{B}(I)$, ezért a mértékkiterjesztési tétel szerint α egyértelműen kiterjeszthető Borel-mértékké I-n.

Definíció (1-változós Lebesgue–Stieltjes mérték)

- Legyen $G \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum,
- $F : G \to \mathbb{R}$ monoton növő,
- $V \subset G$ az F folytonossági pontjainak halmaza,
- $\mathcal{A} = \{\emptyset\} \cup \{[a, b) : a, b \in V, a < b\}$ a folytonossági intervallumok félgyűrűje,
- $\alpha : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, $\alpha\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$, az F megváltozása *a folytonossági intervallumokon*;
- Legyen $\overline{\mu} = \varphi_\alpha$ az α-hoz asszociált külső mérték. A neve: *az F megváltozásából származó Lebesgue–Stieltjes külső mérték*.
- Legyen μ a $\overline{\mu}$ megszorítása a $\overline{\mu}$ szerint mérhető halmazokra. Neve: *az F megváltozásából származó Lebesgue–Stieltjes mérték*. (Thomas Joannes Stieltjes 1856–1894)

Tétel

Ha μ az az F megváltozásából származó Lebesgue–Stieltjes mérték, akkor:

- Bármely folytonossági intervallumra $\mu\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$.
- Ha F balról folytonos, akkor minden intervallumra $\mu\big([a, b)\big) = F(b) - F(a)$.
- Minden Borel-halmaz μ-mérhető.
- μ teljes.

Tétel

Bármely monoton növő $F : I \to \mathbb{R}$ függvény megváltozása indukál egy lokálisan véges Lebesgue–Stieltjes mértéket, amelyre nézve minden Borel-halmaz mérhető.

Tétel

Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue–Stieltjes mérték megszorítása a Borel-halmazokra.

11. Lebesgue–Stieltjes mértékek véges dimenzióban

Addititív téglafüggvény. Eloszlásfüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue–Stieltjes mérték véges dimenzióban. [Petruska, 69–72. o.]

Additív intervallumfüggvények

Most a világ egy nyílt $G \subset \mathbb{R}^p$ halmaz lesz. *Téglának* vagy *intervallumnak* az $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ alakú félig nyílt szorzatokat fogjuk nevezni, amelyeknek *a lezártja is része G-nek*, vagyis elég kis $\varepsilon > 0$ esetén $(a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \times \ldots \times (a_p - \varepsilon, b_p + \varepsilon) \subset G$. A téglák félgyűrűjét jelöljük mondjuk $\mathcal{T}$-vel.

A téglák félgyűrűjén legyen α egy additív, nemnegatív, véges függvény, $\alpha : \mathcal{T} \to [0, \infty)$. Ezt az *additív intervallumfüggvényt* szeretnénk kiterjeszteni mértékké.

Eloszlásfüggvény?

Tegyük fel, hogy $\alpha : \mathcal{T} \to [0, \infty)$ véges, additív függvény. (Kiköthetjük, hogy $\alpha(\emptyset) = 0$, de ez az additivitásból következik.) Milyen $G \to \mathbb{R}$ függvényt nevezhetnénk "α eloszlásfüggvényének"?

2-dimenzióban azt várjuk el, hogy bármely $[a, b) \times [c, d)$ téglára

$$\alpha\big([a, b) \times [c, d)\big) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c),$$

általában pedig bármely $T = \bigtimes_{i=1}^{p} [a_i, b_i)$ téglára

$$\alpha(T) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p \in \{0,1\}} (-1)^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_p} F\left(\begin{Bmatrix} b_1 & \text{ha } \varepsilon_1 = 1 \\ a_1 & \text{ha } \varepsilon_1 = 0 \end{Bmatrix}, \ldots, \begin{Bmatrix} b_p & \text{ha } \varepsilon_p = 1 \\ a_p & \text{ha } \varepsilon_p = 0 \end{Bmatrix} \right),$$

tehát a tégla minden csúcsában vesszük az eloszlásfüggvény értékét, ezeknek sakktáblaszerűen pozitív és negatív előjeleket adunk (a legfelső csúcs előjele pozitív), és összeadjuk.

Ha G vagy α elég szép, mondjuk G az egész tér, akkor tudunk az additív téglafüggvényünkből viszonylag szép, pl. minden koordinátában monoton eloszlásfüggvényt készíteni. Például, ha α a Jordan-térfogat, akkor $F(\mathbf{x}) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_p$ egy jó eloszlásfüggvény. Ha $G = \mathbb{R}^p$ és α tetszőleges, akkor lehet $F(\mathbf{x}) = \pm\alpha\big([0, x_1) \times$

$\ldots \times [0, x_p)\big)$, ahol a negatív x_i esetén $[0, x_i)$ helyett az $[x_i, 0)$ intervallumot vesszük, és az előjel attól függ, hogy az $x_1, \ldots, x_p$ koordináták között hány negatív van.

Ha viszont G bonyolult, akkor ... ööö ...

Folytonossági hipersíkok

Inkább nem is fogunk eloszlásfüggvényekkel bíbelődni, csak veszünk egy véges, additív $\alpha : \mathcal{T} \to [0, \infty)$ téglafüggvényt, és az eloszlásfüggvény folytonossága helyett közvetlenül az α "folytonosságát" fogjuk vizsgálni.

Definíció (Folytonossági hipersík)

Az $x_1 = c$ hipersík az $\alpha : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ intervallumfüggvénynek *folytonossági hipersíkja*, ha minden olyan $R_n \in \mathcal{T}$ csökkenő téglasorozatra, amelyre

$$R_n = [u_n, v_n) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p), \quad u_n \nearrow c \quad \text{és} \quad v_n \searrow c,$$

teljesül, hogy $\alpha(R_n) \to 0$.
A többi kordinátatengelyre merőlegesen hasonlóan definiáljuk az $x_2 = c$, $\ldots$, $x_p = c$ alakú foytonossági hipersíkokat.

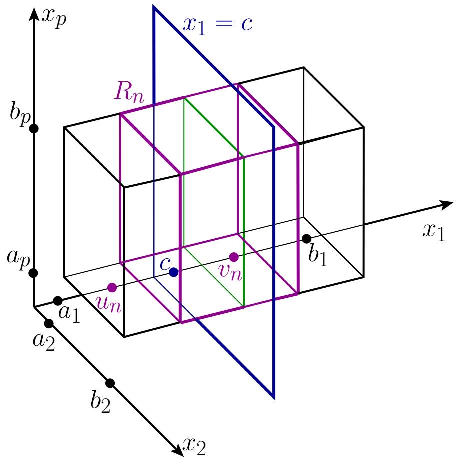
Lemma

Megszámlálható sok kivétellel minden, a tengelyekkel párhuzamos hipersík folytonossági hipersík.

Bizonyítás. Nyilván elég az $x_1 = c$ alakú síkokra.

Vizsgáljunk egy olyan *kivételes* c-t, amire $x_1 = c$ *nem* folytonossági hipersík. A c-hez van egy $R_n = [u_n, v_n) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ csökkenő téglasorozat, amelyre $\lim \alpha(R_n) > 0$.

A $(p-1)$-dimenziós $[a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ téglát kicsit meghízlalhatjuk (ezzel a határérték nem csökken), így az $a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ koordinátákat racionális számoknak is választhatjuk. Ezek után válasszunk olyan $a_1 < c$ és $b_1 > c$ racionális számokat is, amlyekre $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p) \in \mathcal{T}$.



Vizsgáljuk most az

$$f : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\Big([a_1, x) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)\Big)$$

monoton növő függvényt; erre

$$\begin{aligned} \alpha(R_n) &= \alpha\big([u_n, v_n) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)\big) = \\ &= \alpha\big([a_1, v_n) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)\big) \\ &- \alpha\big([a_1, u_n) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_p, b_p)\big) = \\ &= f(v_n) - f(u_n), \end{aligned}$$

így

$$\lim \alpha(R_n) = f(c+0) - f(c-0) > 0.$$

Végül válasszunk egy $q \in \big(f(c-0), f(c+0)\big)$ racionális számot, amelyet az $f(x)$ függvény a c pontban átugrik. Ezzel minden kivételes c-hez rendeltünk egy racionális számokból álló $(a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p, q)$, sorozatot.

A sorozatból visszafelé következtetve az $f(x)$ függvény egyértelműen meghatározott, és csak az $x_1 = c$ pontban ugorja át a q értéket, tehát az $(a_1, b_1, \ldots, a_p, b_p, q)$ sorozat egyértelműen meghatározza c-t. Mivel racionális sorozatból csak megszámlálható sok van, így kivételes c értékből is. □

A nem folytonossági hipersíkokkal baj van, ezért ezeket a kivételes kordinátértékeket nem fogjuk megengedni.

Lemma

Legyen $V \subset G$ az olyan $(c_1, \ldots, c_p)$ pontok halmaza, amelyekre mindegyik $x_i = c_i$ sík folytonossági hipersíkja α-nak, és legyen $\mathcal{F}$ az olyan téglák félgyűrűje, amelyeknek minden csúcsa V-beli. Ekkor a α függvény σ-szubadditív a $\mathcal{F}$ félgyűrűn.

Bizonyítás. (Ugyanaz, mint az 1-dimenziós Lebesgue–Stieltjes mértéknél.)

- Először megmutatjuk, hogy α szubadditív. Tegyük fel, hogy az A téglát lefedik a $C_1, \dots C_n$ téglák; az kell, hogy $\alpha(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i)$.
- Az A téglát a fedőtéglák lapsíkjai kisebb téglákra bontják: $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k$.
- Minden $j = 1, 2, \dots, k$-ra legyen $\chi(i, j) = 1$, ha $A_j \subset C_i$; egyébként $A_j \cap C_i = \varnothing$ és $\chi(i, j) = 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\Big(C_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{k} A_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\Big(\bigsqcup_{j=1}^{k} (C_i \cap A_j)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} \alpha(\underbrace{C_i \cap A_j}_{A_j \text{ vagy } \varnothing})\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k} \chi(i, j) \cdot \alpha(A_j)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{n} \chi(i, j)\Big) \cdot \alpha(A_j) \geqslant \sum_{j=1}^{k} 1 \cdot \alpha(A_j) = \alpha(A).$$

- Most megmutatjuk, hogy α σ-szubadditív.
- Tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{A}$ téglát lefedik a $C_1, C_2, \dots \in \mathcal{A}$ téglák; azt kell igazolnunk, hogy $\alpha(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(C_i)$.
- Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t.
- Az A felső lapsíkjait befelé toljuk úgy, hogy a kapott A' téglára $\operatorname{cl} A' \subset A$, és $\alpha(A') > \alpha(A) - \varepsilon$ legyen. (Lehet, mert a lapsíkok folytonossági hipersíkok.)
- A C_i alsó lapsíkját lefelé (kifelé) toljuk úgy, hogy az így kapott C_i' téglára $\operatorname{int} C_i' \supset C_i$ és $\alpha(C_i') < \alpha(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ legyen.
- Ezek után
$$\operatorname{cl} A' \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\operatorname{int} C_i').$$
- A kompatság miatt valamilyen n-re
$$A' \subset \quad \operatorname{cl} A' \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\operatorname{int} C_i') \quad \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i'$$

$$\alpha(A) - \varepsilon < \alpha(A') \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i') < \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(C_i) + \varepsilon.$$

- Végül $\varepsilon \to 0$, kész.

9. előadás, 2023.03.28.

Következmény

Az α additív és relatív külső mérték, G σ-véges, és az $\mathcal{A}$ által generált σ-algebra $\mathcal{B}(G)$, ezért a mértékkiterjesztési tétel szerint α egyértelműen kiterjeszthető Borel-mértékké G-n.

Definíció (p-dimenziós Lebesgue–Stieltjes mérték)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $\mathcal{T}$ azoknak a félig nyílt tégláknak a félgyűrűje, amelyeknek a lezártja is része G-nek, és legyen $\alpha : \mathcal{T} \to [0, \infty)$ additív.
Legyen $V \subset G$ az olyan $(c_1, \ldots, c_p)$ pontok halmaza, amelyekre mindegyik $x_i = c_i$ sík folytonossági hipersíkja α-nak, és legyen $\mathcal{F}$ az olyan téglák félgyűrűje, amelyeknek minden csúcsa V-beli.
Az $\alpha|_{\mathcal{F}}$-hoz asszociált $\varphi = \varphi_{\alpha|\mathcal{F}}$ külső mértéket az *α-ból származó Lebesgue–Stieltjes külső mérték*nek nevezzük.
A φ-mérhető halmazok $\mathcal{M}$ σ-algebrájára megszorítva, $\mu = \varphi|_{\mathcal{M}}$ az *α-ból származó Lebesgue–Stieltjes mérték*, $(G, \mathcal{M}, \mu)$ a *Lebesgue–Stieltjes mértéktér*.

Ha $G = \mathbb{R}^p$ és α a Jordan-terület, akkor speciális esetként a Lebesgue-mértéket kapjuk.

Tétel

Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue–Stieltjes mérték megszorítása a Borel-halmazokra.

Bizonyítás.

- Legyen μ_0 lokálisan véges Borel-mérték G-n, azaz $\mathbb{R}^p$ Borel halmazain értelmezett mérték. Ezt szeretnénk Lebesgue–Stieltjes mértékként előállítani.

- Legyen $\mathcal{T}$ a G belsejében fekvő, folytonossági hipersíkokkal határolt téglák félgyűrűje. Ezen $\mu_0|_{\mathcal{T}}$ egy additív, σ-szubadditív téglafüggvény.

- A G alaphalmaz σ-véges $\mu_0|_{\mathcal{T}}$ szerint, mert felbontató megszámlálható sok folytonossági tégla uniójára.

- A mértékkiterjesztési tétel szerint $\mu_0|_{\mathcal{T}}$ egyértelműen kiterjeszthető egy μ Lebesgue–Stieltjes mértékké a téglák által generált σ-algebrára, vagyis a Borel-halmazokra.

- Az egyértelműség miatt $\mu_0 = \mu$.

12. Lokálisan véges Borel-mértékek regularitása

Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. Regularitás. Mérhető halmazok "távolsága". Minden Lebesgue-mérhető halmazhoz van tetszőlegesen közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója. [Petruska, 72–73. o.] [Petruska, 72–75., 59. o.]

Tétel

Legyen $X \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra X-en, amely tartalmazza $\mathcal{B}(X)$-et, és μ lokálisan véges mérték $\mathcal{M}$-en.
(Speciális esetek: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes mértéktér, vagy éppen az $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}, \lambda)$ Lebesgue-mértéktér, esetleg $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}, \lambda)$.)
Ekkor tetszőleges $H \in \mathcal{M}$ halmazra teljesülnek a következők.

(1a) Bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $G \subset X$ nyílt halmaz, amelyre $H \subset G$ és $\mu(G \backslash H) < \varepsilon$.

(2a) $\mu(H) = \inf\left\{\mu(G) : G \subset X \text{ nyílt}, H \subset G\right\}$.

(3a) Van olyan $A \in \mathcal{G}_\delta(X)$ halmaz, amelyre $H \subset A$ és $\mu(A \backslash H) = 0$.

(1b) Bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $F \subset H$ zárt halmaz, amelyre $\mu(H \backslash F) < \varepsilon$.

(2b) $\mu(H) = \sup\left\{\mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subset H\right\}$.

(3b) Van olyan $B \in \mathcal{F}_\sigma(X)$ halmaz, amelyre $B \subset H$ és $\mu(H \backslash B) = 0$.

A (2) tulajdonságú, a Borel-halmazokat tartalmazó σ-algebrán értelmezett mértékeket hívjuk *reguláris*nak.

Bizonyítás.

(1a)
- Legyen $\mathcal{T}$ a félig zárt téglák félgyűrűje, $\alpha = \mu|_{\mathcal{T}}$, és $\mathcal{A}$ a folytonossági téglák félgyűrűje.
- A mértékkiterjesztés egyértelműsége miatt $\mu = \varphi_\alpha|_{\mathcal{M}}$; a mértéket előállíthatjuk $\mathcal{A}$-beli téglákkal való fedéssel.
- Az alaphalmaz előáll, mint megszámlálható sok kompakt (pl. kockák) uniója: $X = \bigcup K_n$.
- Mindegyik $H \cap K_n$ halmaz mérhető, a mértéke véges, és tetszőleges pontossággal lefedhető folytonossági téglákkal.

– A félig nyílt fedő téglákat nyílt téglákra hízlalhatjuk. A meghízlalt fedő téglák uniójaként létezik olyan $G_n \subset X$ nyílt halmaz, amelyre $K_n \cap H \subset G_n$ és $\mu(G_n) < \mu(H \cap K_n) + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

– Legyen $G = \bigcup G_n$; ekkor

$$G \backslash H = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_n \backslash H) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(G_n \backslash (H \cap K_n)\big)$$

$$\mu(G \backslash H) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(G_n \backslash (H \cap K_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu(G_n) - \mu(H \cap K_n)\big) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(1b) A komplementerekre áttérve, létezik olyan F zárt halmaz, amelyre $\overline{H} \subset \overline{F} \subset X$ és $\mu\big(\overline{F} \backslash \overline{H}\big) < \varepsilon$, vagyis $F \subset H$ és $\mu(H \backslash F) < \varepsilon$.

(2a) – Ha $H \subset G$, akkor $\mu(G) \geqslant \mu(H)$, ezért $\inf\big\{\mu(G)\big\} \geqslant \mu(H)$.

– Az (1a)-ból $\forall \varepsilon > 0 \quad \inf\big\{\mu(G)\big\} \leqslant \mu(H) + \varepsilon$.

– $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(H) \leqslant \inf\big\{\mu(G)\big\} \leqslant \mu(H) + \varepsilon; \quad \varepsilon \searrow +0$, kész.

(2b) – (kompakt helyett zárttal ez is **triviális**🙈 lenne...)

– Ha $K \subset H$, akkor $\mu(K) \leqslant \mu(H)$, ezért $\sup\big\{\mu(K)\big\} \leqslant \mu(H)$.

– Minden $m < \mu(H)$-hoz keresünk olyan $K \subset H$ kompakt halmazt, amire $\mu(K) > m$.

– Az (1b) miatt van olyan $F \subset H$ zárt halmaz, amelyre $\mu(F) > m$.

– Minden pozitív egész n-re legyen $K_n = F \cap \overline{B}(0, n)$. Mindegyik K_n kompakt, $\bigcup K_n = F$.

– A mérték folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(K_n) = \mu(F) > m$.

– Van olyan n, amelyre $\mu(K_n) > m$.

– Tehát $\forall m < \mu(H) \quad m < \sup\big\{\mu(K)\big\} \leqslant \mu(H). \quad m \nearrow \mu(H)$, kész.

(3a) – Minden n-re legyen $G_n \subset X$ olyan nyílt, amelyre $H \subset G_n$ és $\mu(G_n \backslash H) \leqslant \frac{1}{n}$.

– Legyen $A = \bigcap G_n \in \mathcal{G}_\delta$.

– $H \subset A$ és minden n-re

$$\mu(A \backslash H) \leqslant \mu(G_n \backslash H) \leqslant \frac{1}{n}.$$

– Az $n \to \infty$ határátmenetből $\mu(A \backslash H) = 0$.

(3b) Ugyanúgy, mint (3a), vagy áttérve komplementerekre.

Következmény

Tetszőleges $(X, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes féle mértéktérben

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}^*.$$

(*Az, hogy a csillag mit jelent, attól függ, mi a mérték!*)

Bizonyítás.

- Az előző tétel (3b) szerint
$$\mathcal{M} = \{M \sqcup Z : \quad M \in \mathcal{F}_\sigma(X), \quad \mu(Z) = 0\}.$$
- A (3a) szerint van olyan $N \in \mathcal{G}_\delta$, hogy $Z \subset N$ és $\mu(N) = 0$.
- $M, N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$, tehát $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}^*$.
- A Borel-halmazok mérhetők, ezért $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.
- A minimális, $\mathcal{B}$-t tartalmazó σ-algebra, amelyen μ teljes, a $\mathcal{B}^*$. Ezért $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{M}$.

Következmény (lokálisan véges Borel-mértékek regularitása)

Tetszőleges lokálisan véges Borel-mértékre igazak a fenti (1–3) állítások ($\mathcal{M} = \mathcal{B}$-re).

Megjegyzés

A lokális végesség nem hagyható el, ezt mutatja például a számosságmérték.

12.1 Lemma (közelítés szép halmazokkal)

A Lebesgue–Stieltjes-, speciálisan a Lebesgue-mérhető halmazok közel vannak szép Borel-halmazokhoz: ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes mértéktér, $A \in \mathcal{M}$, és $\mu(A) < \infty$, akkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan B halmaz, ami véges sok, racionális sarkú tégla diszjunkt uniója, és $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Bizonyítás. Fedjük le A-t egy téglasorozattal $\varepsilon/2$ pontossággal:

$$A \subset \bigcup R_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \mu(A) + \varepsilon/2.$$

Legyen n olyan nagy, hogy $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(R_i) < \varepsilon/2$, és legyen

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} R_i.$$

Ekkor

$$\mu(B \subset A) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \backslash A\right) < \varepsilon/2,$$

és

$$\mu(A \backslash B) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} R_i\right) < \varepsilon/2.$$

Megjegyzés

Lehetne a mérhető halmazok között egyfajta félmetrikát csinálni: az A és B halmazok távolsága $\lambda(A \triangle B)$.

A fenti tétel azt is mondja, hogy a Lebesgue–Stieltjes mérhető halmazok majdnem ugyanazok, mint a Borel-halmazok: minden mérhető halmaz egy Borel-halmaz (vagy csak $\mathcal{F}_\sigma$ halmaz) plusz nullmértékű zaj. A lemma szerint pedig minden véges mértékű mérhető halmaz néhány tégla uniója, plusz-mínusz ε-nyi zaj...

III. rész

Mérték szerinti integrál

13. Mérhető függvények

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció), megszámlálható sok mérhető függvény pontonkénti szuprémuma, infimuma, liminfje, limszupja, a konvergenciahalmaz mérhetősége. Luzin tétele.

Emlékszünk, egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fügvény akkor és csak akkor folytonos, ha bármely $H \subset \mathbb{R}$ nyílt (zárt) halmazra a H ősképe, $f^{-1}(H)$ nyílt (zárt). Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor monoton, ha minden (véges vagy végtelen) $I \subset \mathbb{R}$ intervallum ősképe, $f^{-1}(H)$ is intervallum. A folytonosság és a monotonitás is nagyon fontos tulajdonság a Riemann-integrálhatóság vizsálata során, de ezek a tulajdonságok törékenyek, egészen egyszerű műveletek elrontják őket.

Ugyanakkor az ősképképzés egy nagyon kényelmes operáció, felcseréhető az összes halmazművelettel: (véges vagy végtelen) unió ősképe az ősképek uniója, metszet ősképe az ősképek metszete, komplementum ősképe az őskép komplementuma stb.

A mérték szerinti integrálok bevezetése előtt a folytonosság és a monotonitás egy közös általánosítását tárgyaljuk meg.

Definíció

Legyen $(X, \mathcal{M})$ és $(Y, \mathcal{N})$ mérhető terek és $f : X \to Y$.
Az f leképezés *$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mérhető*, ha minden $A \in \mathcal{N}$-re $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$.
Ha $\mathcal{N} = \mathcal{B}$, akkor *$\mathcal{M}$-mérhető* vagy csak *mérhető*.
Ha X, Y topologikus terek, $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$ és $\mathcal{N} = \mathcal{B}(Y)$, akkor *Borel-mérhető*.
Ha $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ és $\mathcal{N} = \mathcal{B}(Y)$, akkor *Lebesgue-mérhető*.
Sokszor nem a σ-algebrával, hanem a mértékkel fejezzük ki: *μ-mérhető*.

Lemma

Legyen $(X, \mathcal{M})$, mérhető tér, Y valamilyen halmaz és $f : X \to Y$. Ekkor

$$\mathcal{N} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$$

σ-algebra Y-on.

Bizonyítás.

- $\varnothing \in \mathcal{N}$, mert $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{M}$.
- $Y \in \mathcal{N}$, mert $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{N}$ zárt a komplementumképzésre: ha $A \in \mathcal{N}$, akkor $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, így $f^{-1}(Y \backslash A) = X \backslash f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, tehát $(Y \backslash A) \in \mathcal{M}$.
- $\mathcal{N}$ zárt a megszámlálható unióra: ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{N}$, akkor minden k indexre $f^{-1}(A_k) \in \mathcal{M}$, így $f^{-1}(\bigcup A_k) = \bigcup f^{-1}(A_k) \in \mathcal{M}$, tehát $(\bigcup A_k) \in \mathcal{M}$.

Megjegyzés. *A Lemma alapján a mérhetőséget elég az $\mathcal{N}$ egy generátorrendszerére ellenőrizni. Például a Borel-halmazokat generálják a $[-\infty, c)$ vagy a $[-\infty, c]$ stb. félegyenesek, és a c végpontokat elég egy sűrű halmazból választani.*

Tétel

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $S \subset \mathbb{R}$ sűrű. Ezek ekvivalesek:

- a f függvény Borel-mérhető.
- minden $c \in S$-re $f^{-1}([-\infty, c)) = \{x : f(x) < c\} \in \mathcal{M}$;
- minden $c \in S$-re $f^{-1}([-\infty, c]) = \{x : f(x) \leqslant c\} \in \mathcal{M}$;
- minden $c \in S$-re $f^{-1}((c, \infty]) = \{x : f(x) > c\} \in \mathcal{M}$;
- minden $c \in S$-re $f^{-1}([c, \infty]) = \{x : f(x) \geqslant c\} \in \mathcal{M}$.
- minden $G \subset \overline{\mathbb{R}}$ nyílt halmazra $f^{-1}(G) = \{x : f(x) \in G\} \in \mathcal{M}$.
- minden $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ intervallumra $f^{-1}(I) = \{x : f(x) \in I\} \in \mathcal{M}$.

Következmény

Speciálisan, minden folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető, és minden monoton $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mérhető.

10. előadás, 2022.03.30.

Mérhetőség és műveletek

Lemma

Mérhető függvények kompozíciója mérhető: ha $g : (x, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ és $f : (Y, \mathcal{N}) \to (Z, \mathcal{K})$ mérhető, akkor $f \circ g : (X, \mathcal{M}) \to (Z, \mathcal{K})$ is mérhető. Speciálisan, ha g mérhető és f folytonos, akkor $f \circ g$ mérhető.

Bizonyítás.

- Bármely $A \subset Z$ halmazra $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}\big(f^{-1}(A)\big)$.
- Ha $A \in \mathcal{K}$, akkor $f^{-1}(A) \in \mathcal{N}$, de akkor $g^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \in \mathcal{M}$.

Állítás

Ha $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor cf, $f + g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, f^2, $1/f$, fg, f/g is mérhető.

Bizonyítás.

- $c \cdot f$, $|f|$ és f^2 egy-egy mérhető és egy folytonos függvény kompozíciója.
- $$\Big\{x : f(x) + g(x) < c\Big\} = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p+q<c}} \Big(\big\{x : f(x) < p\big\} \cap \big\{x : g(x) < q\big\}\Big).$$
- $$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$
- $$fg = \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4}.$$
- $1/x$ mérhető; $1/f$ két mérhető függvény kompozíciója.

Állítás

Ha $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor
(1) $\sup f_n$ és $\inf f_n$ mérhető.
(2) $\limsup f_n$ és $\liminf f_n$ mérhető.
(3) Azon pontok halmaza, ahol $\lim f_n$ létezik, mérhető, és a $\lim f_n$ függvény is mérhető.

Bizonyítás.

$$\Big\{x : \sup_n f_n(x) \leqslant c\Big\} = \bigcap_n \{x : f_n(x) \leqslant c\};$$

$$\Big\{x : \inf_n f_n(x) < c\Big\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) < c\}. \tag{1}$$

$$\limsup f_n = \inf_n \Big(\sup_{m \geqslant n} f_m\Big); \qquad \liminf f_n = \sup_n \Big(\inf_{m \geqslant n} f_m\Big). \tag{2}$$

$$\Big\{x : \liminf f_n(x) < \limsup f_n(x)\Big\} =$$

$$= \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p<q}} \Big(\big\{x : \liminf f_n(x) < p\big\} \cap \big\{x : \limsup f_n(x) > q\big\}\Big) \tag{3}$$

Állítás

Ha $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{R}$ mérhető és X az $A_1, A_2, \ldots$ mérhető halmazok uniója, akkor az

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{ha } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{ha } x \in A_2 \\ & \vdots \end{cases}$$

függvény is mérhető.

Bizonyítás. Bármely $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel-halmazra $f^{-1}(B) = \bigcup_n \big(f_n^{-1}(B) \cap A_n\big)$.

Kérdés

- Az alapvető építőköveink, az összes elemi függvény Borel-mérhető; az alapműveletek, beleértve az esetszétválasztást és a pontonkénti határértéket, nem vezetnek ki a Borel-halmazok és Borel-mérhető függvények köréből.
- Egyáltalán tudunk nem Borel-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *konstruálni*?

Tétel (Luzin (Николай Николаевич Лузин, 1883–1950))

Ha $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes-mérték, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mérhető és $\varepsilon > 0$, akkor létezik olyan folytonos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon.$$

Avagy, a Lebesgue–Stieltjes mérhető függvények "közel" vannak a folytonos függvényekhez.

Bizonyítás. Az f-et komponálhatjuk egy olyan függvénnyel, amely folytonos bijekció $\mathbb{R}$ és $(0,1)$ között (például $y \mapsto \dfrac{\operatorname{arctg} y}{\pi} + \dfrac{1}{2}$), ezért elég az állítást $\mathbb{R}^p \to (0,1)$ függvényekre igazolni.

Minden n-re és $0 \leqslant k < n$ esetén legyen

$$A_{n,k} = \left\{ x \in \mathbb{R}^p : \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n} \right\} \quad \text{és} \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot \chi_{A_{n,k}};$$

ekkor tehát $\Big| f(x) - f_n(x) \Big| < \dfrac{1}{n}$, és $f_n(x) \to f(x)$ egyenletesen.

A μ regularitása miatt minden n-re és k-ra léteznek olyan $Z_{n,k} \subset A_{n,k}$ zárt halmazok, amelyekre $\mu(A_{n,k} \backslash Z_{n,k}) < \dfrac{\varepsilon}{2^n \cdot n}$; legyen

$$Z_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} Z_{n,k} \quad \text{és} \quad Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

A Z_n halmazok és a Z halmaz is zárt.

Mindegyik n-re a $f_n(x)$ egy olyan egyszerű függvény, amely a $Z_{n,0}, \ldots, Z_{n,n-1}$ diszjunkt zárt halmazok mindegyikén konstans, tehát $f_n(x)$ folytonos ezek unióján, Z_n-en. A Z_n-nek a Z is része, tehát az összes $f_n(x)$ függvény folytonos Z-n. Az egyenletes konvergencia miatt $f = \lim f_n$ is folytonos Z-n.

A Tietze féle kiterjesztési tétel szerint a zárt Z-n folytonos $f|_Z$ függvény kiterjeszthető egy $\mathbb{R}^p$-n folytonos g függvénnyé. Végül,

$$\big\{ x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x) \big\} \subset X \backslash Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash Z_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} (A_{n,k} \backslash Z_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{n-1} (A_{n,k} \backslash Z_{n,k}),$$

$$\mu\big(\{ x \in \mathbb{R}^p : f(x) \neq g(x) \} \big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_{n,k} \backslash Z_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^n \cdot n} = \varepsilon.$$

14. Nemnegatív függvények integrálja

Egyszerű függvények. Nemnegatív mérhető függvény mint egyszerű függvények monoton növő limesze. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek. [Petruska, 52–57. o.]

Ebben a fejezetben lesz egy közös, rögzített $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér; minden függvény az X-en vagy egy részhalmazán értelmes, és $\overline{\mathbb{R}}$-be képez. Szeretnénk az eddigi integrálfogalmakat kiterjeszteni mértékterekre.

Definíció

Megállapodás: most, és a továbbiakban is

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

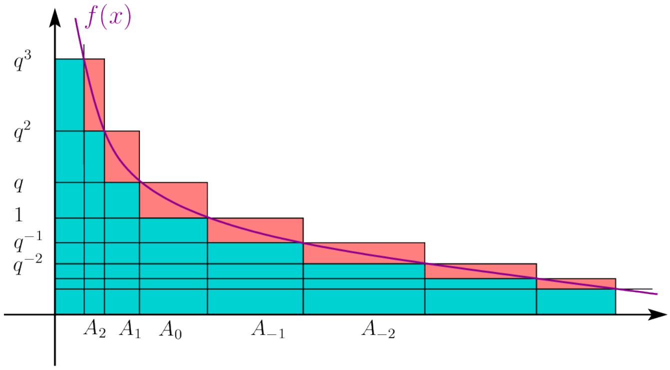
Alsó és felső integrálközelítő összegek?

Most is próbálkozhatnánk azzal, hogy az integrált alsó és felső összegekkel definiáljuk. Az X halmaz felosztása azt jelentené, hogy az X-et felbontjuk megszámlálható sok diszjunkt mérhető halmazra: $X = \bigsqcup A_i$. A felosztáshoz tartozó alsó és felső összeg $s = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\inf_{A_i} f\big) \cdot \mu(A_i)$, illetve $S = \sum_{i=1}^{\infty} \big(\sup_{A_i} f\big) \cdot \mu(A_i)$.

Ha a függvény pozitív és negatív értékeket is felvehet, akkor az alsó és a felső összeg nem feltétlenül létezik, mert $+\infty - \infty$ alakú összegek is előfordulhatnak. *Ezért egyelőre csak nemnegatív értékű függvényeket fogunk integrálni.* Az alsó integrál ezek után lehetne az alsó összegek szuprémuma, a felső integrál a felső összegek infimuma; az integrál akkor létezik, ha az alsó és a felső integrál megegyezik.

Vegyük azonban észre, hogy az alsó és a felső integrál bármilyen nemnegatív, *mérhető* függvény esetén megegyezik. Vegyünk egy $q > 1$ számot, és legyen

$$\begin{aligned} A_N &= f^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{x : f(x) = 0\big\}, \\ A_i(q) &= f^{-1}\big([q^i, q^{i+1})\big) = \big\{x : q^i \leqslant f(x) < q^{i+1}\big\} \quad (i \in \mathbb{Z} \cup \{N\}) \end{aligned}$$



A felosztáshoz tartozó alsó és felső összeg legyen $s(q)$, illetve $S(q)$; ekkor

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} q^i \cdot \mu(A_i) \leqslant s(q) \leqslant S(q) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}} q^{i+1} \cdot \mu(A_i) = q \sum_{i\in\mathbb{Z}} q^i \cdot \mu(A_i)$$

és emiatt

$$\underline{\int} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \overline{\int} f \,\mathrm{d}\mu \leqslant S(q) \leqslant q \cdot s(q) \leqslant q \underline{\int} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha q-val tartunk 1-hez, azt kapjuk, hogy $\underline{\int} f \,\mathrm{d}\mu = \overline{\int} f \,\mathrm{d}\mu$. Ezek után szükségtelen alsó és felső integrálokkal és integrálközelítő összegekkel foglalkozni. *Csak az alsó integrált fogjuk használni.*

Az alsó összegek esetében pedig elég az összegből véges sok tagot megtartani, mert az ilyen részletösszegek szuprémuma is kiadja a teljes sor összegét. Tehát: *nemnegatív mérhető függvényekre csak alsó integrál lesz, véges sok tagú alsó összegekkel*.

Egyszerű függvények integrálja

A véges sok tagú alsó összegek maguk is egy-egy speciális, csak véges sok értéket felvevő függvénynek egy, intuitívan integrálnak tekinthető mennyisége.

Definíció (egyszerű függvény)

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér.
Az $f : X \to \mathbb{R}$ *egyszerű függvény*, ha mérhető, és az értékkészlete véges.
Másképpen: f akkor mérhető, ha vannak olyan $A_1, \dots, A_n$ diszjunkt, mérhető halmazok és $c_1, \dots, c_n$ számok, hogy

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{A_i}.$$

Definíció (egyszerű függvény integrálja)

Az $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{A_i}$ egyszerű függvény *μ szerinti integrálja*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(A_i), \quad \text{jele} \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Az f *μ szerinti integrálja a $H \in \mathcal{M}$ halmazon*

$$\int_H f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(H \cap A_i) = \int_X (f \cdot \chi_H) \, \mathrm{d}\mu.$$

Állítás

Ugyanannak a függvénynek többféle felírása is lehet, mert a c_i értékek között egyenlők is lehetnek, de a képlet minden felírásra ugyanazt az értéket adja.

Példa

Ha $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, és μ a számlálómérték, akkor a $\{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ függvények az n hosszú számsorozatok, minden függvény egyszerű, és az integrál a sorozat összege.

Lemma

Nemnegatív egyszerű függvényekre

(1) Ha $f \leqslant g$, akkor $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(2) Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0$

(3) $A \subset B$ esetén $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_B \chi_A f \, \mathrm{d}\mu$

(4) $\int_A c \, \mathrm{d}\mu = c\mu(A)$

(5) $\int (f + g) = \int f + \int g$;

Bizonyítás. (1) Legyen $X = \bigsqcup A_i = \bigsqcup_j B_j$, $f = \sum c_i \cdot \chi_{A_i}$ és $g = \sum_j d_j \cdot \chi_{B_j}$.

$$\int_X f = \sum_i c_i \cdot \mu(A_i) = \sum_i c_i \cdot \left(\sum_j \mu(A_i \cap B_j) \right)$$

$$= \sum_i \sum_j c_i \cdot \mu(A_i \cap B_j) \leqslant \sum_j \sum_i d_j \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_j d_j \cdot \left(\sum_i \mu(A_i \cap B_j) \right) = \sum_j d_j \cdot \mu(B_j) = \int_X g.$$

(5)

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i,j} (c_i + d_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_i c_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j d_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_i c_i \mu(A_i) + \sum_i d_j \mu(B_i) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Nemnegatív függvények integrálja

Definíció (nemnegatív mérhető függvény integrálja)

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér.
Ha $f : X \to [0, \infty]$ mérhető (a ∞ értéket is megengedjük), és H mérhető halmaz, akkor az f függvény μ szerinti integrálja

$$\sup \left\{ \int_H h \mathrm{d}\mu : \ h \text{ egyszerű függvény, } 0 \leqslant h \leqslant f \right\}.$$

Jele

$$\int_H f \mathrm{d}\mu = \int_H f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Állítás

Ha f nemnegatív egyszerű függvény, akkor a kétféle integrál-definíció ugyanazt az eredményt adja.

Bizonyítás. **Triviális**🙈 a Lemma (1) pontjából.

Példa

Ha $X = \mathbb{N}$, és μ a számlálómérték, akkor az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények a végtelen számsorozatok, és (egyelőre csak nemnegatív tagú sorozatokra) az integrál a sor összege.

Tétel

Legyenek $f, g \geqslant 0$ mérhető függvények.
(1) Ha $f \leqslant g$, akkor $\int_X f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$;
(2) $\int_A c \mathrm{d}\mu = c\mu(A)$
(3) Ha $\mu(A) = 0$, akkor $\int_A f \mathrm{d}\mu = 0$
(4) $A \subset B$ esetén $\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_B \chi_A f \mathrm{d}\mu$
(5) $c \geqslant 0$ esetén $\int cf = c \int f$;
(6) $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Bizonyítás. (1–5) **triviális**🙊; az utolsó bizonyítása később.

11. előadás, 2022.04.04.

15. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétel. A MKT. nem igaz csökkenő sorozatra. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Végtelen táblázat összege mint a BLT speciális esete. Fatou-lemma. Példák, amikor a Fatou-lemmában nincs egyenlőség, illetve limsuppal egyik irányban sem igaz. [Petruska, 57–60. o.]

Tétel (monoton konvergencia tétel, MKT)

Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \ldots$ nemnegatív mérhetőek X-en és $E \in \mathcal{M}$, akkor

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$

(És mindkét határérték létezik.)

Bizonyítás. Feltehető, hogy $E = X$, mert áttérhetünk az $(E, \mathcal{M}|_E, \mu)$ mértéktérre vagy $X \setminus E$ pontjaiban a függvényeket a konstans nullának definiálhatjuk.

Vegyük észre, hogy az állításban szereplő határértékek és integrálok mind léteznek, és $f_n \leqslant f$ miatt $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \mathrm{d}\mu$ **triviális**🙊. A másik irányú egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk.

Vegyünk egy olyan, egyszerű függvényekből álló $g_1, g_2, \ldots$ sorozatot, amelyre $g_m \leqslant f$ és $\int_X g_m \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu$.

Most egy időre rögzítsük m-et, és vegyünk még egy $0 < \varepsilon < 1$ számot is.

A g_m egyszerű függvény, tehát $g_m = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$ valamilyen $c_i > 0$ számokkal és páronként diszjunkt, mérhető A_i halmazokkal. Minden n-re legyen $A_{i,n} = \{x \in A_i : f_n(x) > (1-\varepsilon)c_i\}$. A monotonitás, azaz $f_{n+1} \geqslant f_n$ miatt $A_{i,n+1} \supset A_{i,n}$.

Az A_i halmazon $\lim f_n(x) = f(x) \geqslant c_i > (1-\varepsilon)c_i$, ebből következik, hogy minden $x \in A_i$-hez van olyan n, hogy $f_n(x) > (1-\varepsilon)c_i$, tehát $x \in A_{i,n}$; ezért $\bigcup_{n=1}^\infty A_{i,n} = A_i$, és így

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i).$$

A $h_n = \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon)c_i \cdot \chi_{A_{i,n}}$ egyszerű függvény és $h_n \leqslant f_n$, ezért

$$\int f_n \geqslant \int h_n = \sum_{i=1}^k (1-\varepsilon)c_i \cdot \mu(A_{i,n}).$$

Az $n \to \infty$ határátmenetből

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \sum_{i=1}^{k} (1-\varepsilon) c_i \cdot \mu(A_i) = (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \mu(A_i) = (1-\varepsilon) \int g_m.$$

Most $\varepsilon \to 0$:

$$\lim \int f_n \geqslant \int g_m;$$

végül $m \to \infty$:

$$\lim \int f_n \geqslant \int f.$$

Példa

Csökkenő sorozatra a MKT nem igaz, pl. $\mathbb{R}$-en $f_n(x) = \frac{1}{n}$ vagy $(0,1)$-en $g_n = \frac{1}{nx}$.

Kérdés

Vajon van olyan ellenpélda is, amikor $\int f_n$ véges?

Tétel

Ha $f, g \geqslant 0$ mérhetőek, akkor $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Bizonyítás. Minden pozitív egész n-re legyen

$$f_n(x) = \max \left\{ \frac{k}{2^n} : \ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \frac{k}{2^n} \leqslant \min(f(x), n) \right\}$$

és

$$g_n(x) = \max \left\{ \frac{k}{2^n} : \ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant \frac{k}{2^n} \leqslant \min(g(x), n) \right\}$$

Ezek nemnegatív egyszerű függvények, $f_n \nearrow f$ és $g_n \nearrow g$; a MKT miatt

$$\begin{aligned} \int (f+g) \mathrm{d}\mu &= \lim \int (f_n + g_n) \mathrm{d}\mu = \lim \left(\int f_n \mathrm{d}\mu + \int g_n \mathrm{d}\mu \right) = \\ &= \lim \int f_n \mathrm{d}\mu + \lim \int g_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Tétel (Beppo Levi (1875–1961), BLT)

Ha $f_1, f_2, \ldots \geqslant 0$ mérhetők, akkor

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás.

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{MKT}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) \mathrm{d}\mu =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Ha $X = \mathbb{N}$ és μ a számlálómérték, akkor visszakapjuk azt, hogy ha egy végtelen táblázatban nemnegatív számok vannak, akkor az oszlopösszegek összege egyenlő a sorösszegek összegével:

Következmény

$a_{n,k} \geqslant 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}$$

Tétel (Fatou-lemma, Pierre Joseph Louis Fatou (1878–1929))

Ha $f_1, f_2, \ldots \geqslant 0$ mérhetők, akkor

$$\int_X (\liminf f_n) \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. A $g_n(x) = \inf_{m\geqslant n} f_n(x)$ függvénysorozat pontonként monoton nő, így

$$\int_X (\liminf f_n) \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geqslant n} f_m\right)\right) \mathrm{d}\mu \overset{\text{mkt}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\inf_{m\geqslant n} f_m\right) \mathrm{d}\mu =$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_X \left(\inf_{m\geqslant n} f_m\right) \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

Példák

1. Lehetséges, hogy a Fatou-lemmában a két oldal nem egyenlő, pl. legyen a $[0,2)$ intervallumon

$$f_n = \begin{cases} \chi\big([0,1)\big) & \text{ha } n \text{ páros} \\ \chi\big([1,2)\big) & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Bármely $x \in [0,2)$-re az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ sorozat felváltva 0 és 1, ezért $\liminf f_n(x) = 0$.
Ugyanakkor $\int_{[0,2)} f_n \mathrm{d}\lambda = 1$ minden n-re, ezért

$$\int_{[0,2)} (\liminf f_n)\mathrm{d}\lambda = 0 \quad < \quad \liminf \int_X f_n \mathrm{d}\lambda = 1.$$

2. A Fatou-lemma $\liminf$ helyett $\limsup$-pal egyik irányban sem igaz.

(2a) Az előző példában $\limsup f_n(x) = 1$ és

$$\int_{[0,2)} (\limsup f_n)\mathrm{d}\lambda = 2 \quad > \quad \limsup \int_X f_n \mathrm{d}\lambda = 1.$$

(2b) Az $X = \mathbb{R}$, $f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}$ függvénysorozatra $\lim f_n = 0$ és $\int f_n = 1$, ezért

$$\int_{\mathbb{R}} (\limsup f_n)\mathrm{d}\lambda = 0 \quad < \quad \limsup \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda = 1.$$

Egy másik példa: $X = [0,1]$, $f_n = n \cdot \chi_{(0,1/n)}$.

Példa

A Fatou-lemmát is érdekes felírni akár csak kéttagú összegekre: tetszőleges $a_1, a_2, \ldots \geqslant 0$ és $b_1, b_2, \ldots \geqslant 0$ számokra

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leqslant \liminf(a_n + b_n).$$

15.1 Tétel

Legyen $f \geqslant 0$ mérhető függvény a $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren, Ekkor az

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad \varphi(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

függvény mérték $\mathcal{M}$-en.

Bizonyítás. Az **triviális**🙊, hogy $\varphi \geqslant 0$ és $\varphi(\emptyset) = 0$, ezért elég azt igazolni, hogy a φ halmazfüggvény σ-additív.

Tegyük fel, hogy $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, akkor $\chi_A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{B_n}$, és

$$\varphi(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\chi_A \cdot f) \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{B_n} \cdot f \right) \mathrm{d}\mu =$$

$$\overset{\text{BLT}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X (\chi_{B_n} \cdot f) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n).$$

16. Valós és komplex értékű függvények integrálja

Előjeles és komplex függvények integrálja. Rögített függvény integrálja, mint előeles/komplex mérték.

Definíció

- Valós értékű mérhető függvényekre

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$$

ha kivonhatók egymásból, vagyis ha $\int_X f_+ \, d\mu$ és $\int_X f_- \, d\mu$ közül legalább az egyik véges.

- Az f mérhető függvény a μ mérték szerint *integrálható*, ha $\int_X f_+ d\mu$ és $\int_X f_- d\mu$ is véges. (Lebesgue-mérték esetén *Lebesgue-integrálható* stb.)

- Komplex értékű mérhető függvényre

$$\int_X f \, d\mu = \int_X (\mathrm{Re}\, f) \, d\mu + i \int_X (\mathrm{Im}\, f) \, d\mu,$$

és csak akkor értelmezzük, ha mindkettő véges. (Tehát, egy komplex értékű függvény integrálja nem lehet végtelen).

Tétel

Tegyük fel, hogy $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ és $\int_X g\,\mathrm{d}\mu$ is értelmes.

(1) $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ véges $\Leftrightarrow$ $\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$ véges.

(2)
$$\int_X cf\,\mathrm{d}\mu = c\int_X f\,\mathrm{d}\mu. \quad \text{(komplexre is).}$$

(3) Ha $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ és $\int_X g\,\mathrm{d}\mu$ létezik és összeadhatók, akkor $\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu$ is létezik, és
$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

(4)
$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás.

(1)
$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+\,\mathrm{d}\mu - \int_X f_-\,\mathrm{d}\mu \quad \text{és} \quad \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_+\,\mathrm{d}\mu + \int_X f_-\,\mathrm{d}\mu.$$

(3) Elég a valós eset igazolni, utána a komplex eset **triviális**🙈.

- Az összeadhatóság miatt ($\int_X f_+\,\mathrm{d}\mu$ és $\int_X g_+\,\mathrm{d}\mu$ is véges), vagy ($\int_X f_-\,\mathrm{d}\mu$ és $\int_X g_-\,\mathrm{d}\mu$, is véges).
- Néhány speciális eset:
  - Ha A, B diszjunktak, és $f \geqslant 0$, akkor $\int_{A\sqcup B} f\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_C f\,\mathrm{d}\mu$. (Már volt.)
  - Ha $f, g \geqslant 0$, akkor $\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_A g\,\mathrm{d}\mu$. (Már volt.)
  - Ha $f \geqslant g \geqslant 0$ és $\int_A g\,\mathrm{d}\mu$ véges, akkor $\int_A (f-g)\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu - \int_A g\,\mathrm{d}\mu$. (Az előző átrendezése.)
- Szétbontjuk az alaphalmazt 6 részre f, g és $f+g$ előjele szerint:

$$A_1 = \{x \in X : f \geqslant 0, g \geqslant 0\}; \qquad A_4 = \{x \in X : f < 0, g < 0\};$$
$$A_2 = \{x \in X : f \geqslant 0, g < 0, f \geqslant |g|\}; \quad A_5 = \{x \in X : f \geqslant 0, g < 0, |g| > f\};$$
$$A_3 = \{x \in X : g \geqslant 0, f < 0, g \geqslant |f|\}. \quad A_6 = \{x \in X : g \geqslant 0, f < 0, |f| > g\};$$

- $$\begin{aligned}\int_X (f+g)_+ \,\mathrm{d}\mu &= \int_{A_1\cup A_2\cup A_3} (f+g)_+ \\ &= \int_{A_1} (f_+ + g_+) + \int_{A_2} (f_+ - g_-) + \int_{A_3} (g_+ - f_-) \\ &= (\int_{A_1} f_+ + \int_{A_1} g_+) + (\int_{A_2} f_+ - \int_{A_2} g_-) + (\int_{A_3} g_+ - \int_{A_3} f_-).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_X (f+g)_- \,\mathrm{d}\mu &= \int_{A_4\cup A_5\cup A_6} (f+g)_- \\ &= \int_{A_4} (f_- + g_-) + \int_{A_5} (g_- - f_+) + \int_{A_6} (f_- - g_+) \\ &= (\int_{A_4} f_- + \int_{A_4} g_-) + (\int_{A_5} g_- - \int_{A_5} f_+) + (\int_{A_6} f_- - \int_{A_6} g_+).\end{aligned}$$

- Mindkettő létezik, legalább az egyik véges.

- $$\begin{aligned}\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \int_X (f+g)_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X (f+g)_- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \left(\int_{A_1} f_+ + \int_{A_1} g_+ + \int_{A_2} f_+ - \int_{A_2} g_- + \int_{A_3} g_+ - \int_{A_3} f_-\right) \\ &\quad - \left(\int_{A_4} f_- + \int_{A_4} g_- + \int_{A_5} g_- - \int_{A_5} f_+ + \int_{A_6} f_- - \int_{A_6} g_+\right) \\ &= \left(\left(\int_{A_1} f_+ + \int_{A_2} f_+ + \int_{A_5} f_+\right) - \left(\int_{A_4} f_- + \int_{A_6} f_- + \int_{A_3} f_-\right)\right) \\ &\quad + \left(\left(\int_{A_1} g_+ + \int_{A_6} g_+ + \int_{A_3} g_+\right) - \left(\int_{A_4} g_- + \int_{A_2} g_- + \int_{A_5} g_-\right)\right) \\ &= \left(\int_X f_+ - \int_X f_-\right) + \left(\int_X g_+ - \int_X g_-\right) = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(2a) valós esetben:

- Ha $c \geqslant 0$, akkor

$$\int cf = \int (cf)_+ - \int (cf)_- = c\int f_+ - c\int f_- = c\left(\int f_+ - \int f_-\right) = c\int f.$$

- Ha $c < 0$, akkor
$$\int cf = \int (cf)_+ - \int (cf)_- = \int |c| f_- - \int |c| f_+ = -|c| \left(\int f_+ - \int f_- \right) = c \int f.$$

(2b) A komplex esetben kibontjuk valós és képzetes részekre: legyen $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, $d = \operatorname{Re} c$, $e = \operatorname{Im} c$;
$$\int cf = \int (d+ei)(u+iv) = \int \Big((du-ev)+(dv+eu)i \Big) = \int (du-ev) + i \int (dv+eu)$$
$$= d \int u - e \int v + di \int v + ei \int u = (d+ei) \left(\int u + i \int v \right) = c \int f.$$

(4) A valós esetben
$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = \left| \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu \right| \leqslant \int_X f_+ \, \mathrm{d}\mu + \int_X f_- \, \mathrm{d}\mu$$
$$= \int_X (f_+ + f_-) \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

12. előadás, 2022.04.06.

- A komplex esetben először elforgatjuk f-et úgy, hogy $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ nemnegatív valós legyen.
- Egy alkalmas egységnyi ω komplex számmal $\omega \cdot \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ nemnegatív valós.
- $$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| = \omega \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \operatorname{Re} \left(\omega \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right) = \operatorname{Re} \left(\int_X (\omega f) \, \mathrm{d}\mu \right)$$
$$= \int_X \operatorname{Re}(\omega f) \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Az integrál, mint előjeles mérték

Tétel

Legyen f valós vagy komplex értékű függvény a $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren, amelyre $\int_X f \, d\mu$ létezik. Ekkor az

$$\varphi : \mathcal{M} \to [0, \infty], \quad \varphi(A) = \int_A f \, d\mu$$

függvény előjeles, iletve komplex mérték $\mathcal{M}$-en.

Bizonyítás. Elég a valós esetet igazolni; komplex mérték esetén külön-külön igaz a tétel a valós és a képzetes részre.

Ismét csak $\varphi(\emptyset) = 0$, és azt kell igazolni, hogy a φ függvény σ-additív.

Legyen $\varphi_+(A) = \int_A f_+ \, d\mu$ és $\varphi_-(A) = \int_A f_- \, d\mu$; a 15 tétel szerint ezek mértékek, és $\int f$ definíciója miatt $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.

Ha $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_+(B_n) = \varphi_+\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \varphi_+(A) = \int_A f_+ d\mu \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_-(B_n) = \int_A f_- d\mu$$

közül legalább az egyik véges, ezért a két sor tagonként kivonható egymásból:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\varphi_+(B_n) - \varphi_-(B_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_+(B_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_-(B_n) =$$
$$= \varphi_+(A) - \varphi_-(A) = \varphi(A).$$

Közelítés szép függvényekkel

Lemma

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $(G, \mathcal{B}, \mu)$ Lebesgue–Stieltjes mérték, f integrálható és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan h függvény, amely véges sok folytonossági téglán konstans, azokon kívül 0, és $\int_G |f - h| d\mu < \varepsilon$.
Avagy, az integrálható függvények vektorterében sűrűn vannak az olyan "szép" függvények, amelyek véges sok téglán konstansok, azokon kívül az értékük 0.

Bizonyítás.

- A program:
  - Elég $G \to [0, \infty]$ függvényekre bizonyítanunk, utána külön-külön kereshetünk megfelelő függvényeket a $(\operatorname{Re} f)_+$, $(\operatorname{Re} f)_-$, $(\operatorname{Im} f)_+$, $(\operatorname{Im} f)_-$ függvényekhez és $\varepsilon/4$-hez.
  - Az $f : G \to [0, \infty]$ függvényt egy $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k}$ egyszerű függvényre cseréljük.
  - Az A_k halmazokat véges sok folytonossági tégla uniójával helyettesítjük.
- Legyen tehát $f : G \to [0, \infty]$, μ-integrálható.
- Van olyan $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k}$ egyszerű függvény, amelyre $0 \leqslant g \leqslant f$ és $\int_G (f - g)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/2$.
- Az f integrálhatósága miatt mindegyik $\mu(A_k)$ véges.
- A 12 Lemma miatt Mindegyik A_k-hoz vannak olyan B_k "szép" halmazok, amelyek véges sok folytonossági tégla uniói, és $\mu(A_k \triangle B_k) < \dfrac{\varepsilon}{2n|c_k|}$.
- Legyen $h = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{B_k}$.
- Azt állítjuk, hogy A h egy "szép" függvény. Ez **triviális**🙊, ha a B_k halmazok diszjunktak. Általában, a téglákat az összes felhasznált lapsíkkal kisebb téglákra tovább bonthatjuk. Így már csak annyi történhet, hogy néhány tégla több B_k halmazban is szerepel, de ettől még a függvény "szép" marad.
- Az f és g távolsága:

$$\int_G |f - h|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_G |f - g|\mathrm{d}\mu + \int_G |g - h|\mathrm{d}\mu = \frac{\varepsilon}{2} + \int_G \left| \sum_{k=1}^{n} c_k(\chi_{A_k} - \chi_{B_k}) \right| \mathrm{d}\mu <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \mu(A_k \triangle B_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2n|c_k|} = \varepsilon.$$

17. Függvénysorozatok integrálja

Fatou–Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum ||f_n||_1$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m. [Petruska, 57–60. o.]

Definíció

Legyen X tetszőleges halmaz, $f_1, f_2, \ldots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vagy $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$, és $g : X \to [0, \infty]$.

- Ha minden $x \in X$-re és $n \in \mathbb{N}$-re $\left|f_n(x)\right| \leqslant g(x)$, akkor azt mondjuk, hogy
- a g függvény *dominálja* az $f_1, f_2, \ldots$ függvénysorozatot.

dominháns vs. majoráns ♡

Egyszer valaki megkérdezte az Analízis 4 előadáson, hogy mi a különbség *domináns* és a sorokra vonatkozó Weierstrass-kritériumban szereplő *majoráns* között.

- *dominans* (latin): uralkodó
- *dominus* (latin): úr, Úr isten, uralkodó, császár, kényúr, zsarnok, parancsoló, igazgató, intéző, rendező, tisztelendő úr, tulajdonos, gazda, házigazda, háziúr, kedves, szerető
- *maior* (latin): nagyobb, több, nagykorú, dicsekvőbb, erősebb, fontosabb, hatalmasabb, hevesebb, idősebb, jelentősebb, magasabb, súlyosabb, tágasabb, tekintélyesebb, túlzottabb, viharosabb
- *dominant* (angol): uralkodó, kiemelkedő, túlsúlyban levő
- *mayor* (angol): polgármester, városbíró

Lemma (Fatou–Lebesgue tétel)

- Ha $f_1, f_2, \ldots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ és $g : X \to [0, \infty]$ mérhető függvények az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren,
- g dominálja az $f_1, f_2, \ldots$ függvényeket, és $\int_X g$ véges, akkor

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás.

- Mivel $|f_n| \leqslant g$, az is igaz, hogy $|\liminf f_n| \leqslant g$ és $|\limsup f_n| \leqslant g$, ezért $\int_X |f_n|$, $\int_X |\liminf f_n|$ és $\int_X |\limsup f_n|$ mind véges, az értékük legfeljebb $\int g$.
- Tehát: Az állításban szereplő integrálok mind léteznek és végesek.
- A g a ∞ értéket is felveheti, de csak egy nullmértékű halmazon.
- Ezt a halmazt elhagyjuk X-ből, és a maradékon bizonyítunk, ahol g és az összes f_n függvény értéke véges.
- A nullmértékű halmaz elhagyása nem változtatja meg az integrálok értékét.
- Az első egyenlőtlenség bizonyítása: Fatou-lemma a $g + f_n \geqslant 0$ függvényre.

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \big(\liminf_{n\to\infty}(g + f_n) - g\big)\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_X \big(\liminf_{n\to\infty}(g + f_n)\big)\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int_X (g + f_n)\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X (g + f_n)\,\mathrm{d}\mu - \int_X g\,\mathrm{d}\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

- A középső egyenlőtlenség **triviális**🙈.
- Az utolsó egyenlőtlenség bizonyítása: Fatou-lemma a $g - f_n \geqslant 0$ függvényre.

$$\int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \big(g - \liminf_{n\to\infty}(g - f_n)\big)\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_X g\,\mathrm{d}\mu - \int_X \big(\liminf_{n\to\infty}(g - f_n)\big)\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{Fatou}}{\geqslant} \int_X g\,\mathrm{d}\mu - \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_X g\,\mathrm{d}\mu - \int_X (g - f_n)\,\mathrm{d}\mu \right) = \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Tétel (dominált konvergencia tétel, DKT; nagy Lebesgue-tétel)

- Ha $f_1, f_2, \ldots : X \to \overline{\mathbb{R}}$ vagy $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$, és $g : X \to [0, \infty]$ mérhető függvények az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren,
- g dominálja az $f_1, f_2, \ldots$ függvényeket, és $\int_X g$ véges, és
- $f_n \to f$ pontonként, akkor

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu, \qquad \text{avagy} \qquad \int_X (\lim f_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás.

- A valós esetben

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

- A komplex esetben külön-külön alkalmazzuk ugyanezt a valós és a képzetes részre.

Példa (Tannery tétele; Jules Tannery (1848-1910))

- Legyen minden $k, n \in \mathbb{N}$-re $a_k(n)$ valós vagy komplex szám úgy, hogy
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(n)$ konvergens minden n-re
- Minden k-ra $a_k(1), a_k(2), \ldots$ konvergens;
- $M_1, M_2, \ldots \geqslant 0$ olyan sorozat, hogy minden k, n esetén $|a_k(n)| \leqslant M_k$, és $\sum M_k < \infty$.

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(n) \overset{\text{DKT}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k(n).$$

Az utolsó feltétel nélkül nem igaz:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_1(1)=1 & a_2(1)=0 & a_3(1)=0 & a_4(1)=0 & a_5(1)=0 & \dots & \Sigma=1 \\
a_1(2)=0 & a_2(2)=1 & a_3(2)=0 & a_4(2)=0 & a_5(2)=0 & \dots & \Sigma=1 \\
a_1(3)=0 & a_2(3)=0 & a_3(3)=1 & a_4(3)=0 & a_5(3)=0 & \dots & \Sigma=1 \\
a_1(4)=0 & a_2(4)=0 & a_3(4)=0 & a_4(4)=1 & a_5(4)=0 & \dots & \Sigma=1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\lim=0 & \lim=0 & \lim=0 & \lim=0 & \lim=0 & \dots & \Sigma\lim\neq\lim\Sigma
\end{array}$$

Tétel (korlátos konvergencia tétel, KKT; kis Lebesgue-tétel)

- Ha $(X, \mathcal{M}, \mu)$ véges mértéktér, vagyis $\mu(X)$ véges,
- $f_1, f_2, \dots : X \to \mathbb{R}$ vagy $f_1, f_2, \dots : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvények, egyenletesen korlátosak, és
- $f_n \to f$ pontonként, akkor

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu, \qquad \text{avagy} \qquad \int_X (\lim f_n) \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Következik a DKT-ből: ha $|f_n| \leqslant M$ minden n-re, akkor $g = M$ jó domináns.

Példa

Ha $1 \leqslant k \leqslant K$ esetén $a_k(1), a_k(2), \dots$ konvergens számsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K} a_k(n) \overset{\text{KKT}}{=} \sum_{k=1}^{K} \lim_{n\to\infty} a_k(n).$$

Sorozat helyett függvény határérték?

A konvergenciatételeinket (MKT, BL, Fl, KKT, DKT) csak sorozatos formában mondtuk ki. Az átviteli elvek segítségével átírhatjuk paraméteres integrálokra.

Példa

- Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ véges mértéktér, $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : X \times I \to \mathbb{R}$, úgy, hogy
- Minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(x,t)$ szekciófüggvény mérhető,
- Minden $x \in X$ esetén a $t \mapsto f(x,t)$ szekciófüggvény folytonos.
- Ha f korlátos, akkor az
$$F(t) = \int_X f(x,t) \mathrm{d}\mu$$
paraméteres integrál folytonos.

Bizonyítás.

- A folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt a folytonosság bizonyításához elég azt ellenőrizni, hogy ha $a, t_1, t_2, \ldots \in I$, és $t_n \to a$, akkor $F(t_n) \to F(a)$.
- Legyen $g_n(x) = f(x, t_n)$ és $g(x) = f(x,a)$; ekkor $g_n(x) \to g(a)$ pontonként.
- $$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu \overset{\text{KKT}}{=} \int_X g \mathrm{d}\mu = F(a).$$

Példa (ugyanez dominált konvergenciatétellel)

- Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ véges mértéktér, $I \in \mathbb{R}$ intervallum, $f : X \times I \to \mathbb{R}$, úgy, hogy
- Minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(x,t)$ szekciófüggvény mérhető,
- Minden $x \in X$ esetén a $t \mapsto f(x,t)$ szekciófüggvény folytonos.
- Ha van egy integrálható $g : X \to [0, \infty]$ függvény, amire bármely x, t esetén $f\big|(x,t)\big| \leqslant g(x)$, akkor az
$$F(t) = \int_X f(x,t) \mathrm{d}\mu$$
paraméteres integrál folytonos.

Félre: Látjuk már, hogy a paraméteres integrálokról szóló további tételeink átírásához az $X \times I$ szorzaton kell majd integrálni...

Majdnem mindenhol mérhető függvények

Definíció (majdnem mindenütt teljesülő tulajdonság)

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér és $T : X \to \{igaz, hamis\}$. A T tulajdonság az A halmazon *μ-majdnem mindenütt*, rövitítve *μ-m.m.* vagy csak *m.m.* teljesül, ha van olyan N nullmértékű halmaz, hogy $A \backslash N$-en T konstans igaz.

Teljes mértéktéren a definíció egyszerűbb: az a halmaz, ahol T hamis, μ-nullmértékű.

Definíció (majdnem mérhető függvény)

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér. Az f függvény *μ-majdnem mérhető*, ha egy nullmértékű halmazon megváltoztathatjuk/definiálhatjuk úgy, hogy mérhető legyen.

Lemma

Ha f és g mérhetők az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren és $f = g$ μ-m.m., akkor $\int_X f = \int_X g$. (Ha az egyik létezik, akkor a másik is.)

Következmény

Az eddigi integrálfogalmakat egyértelműen kiterjeszthetjük majdnem mérhető függvényekre.
A különböző konvergenciatételeink igazak maradnak majdnem mérhető függvényekre is.

Példa

Van, amikor egy állítás csak m.m. igaz:

(1) Ha $f \geqslant 0$ mérhető függvény az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren, és $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$, akkor $f = 0$ μ-m.m.

(2) Ha $f_1, f_2, \ldots$ mérhető függvények az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ μ-m.m. x-re konvergens.

Bizonyítás. (1) Minden n-re $\mu(f > \frac{1}{n}) = 0$, különben az integrál pozitív lenne,

ezért
$$\mu(f > 0) = \lim \mu(f > \tfrac{1}{n}) = 0.$$

(2) Legyen $g = \sum |f_n|$. A Beppo Levi tétel miatt
$$\int_X g \mathrm{d}\mu = \sum \int_X |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty,$$
ezért $g < \infty$ m.m.. Akkor viszont $\sum f_n(x)$ m.m. x-re abszolút konvergens, tehát konvergens.

13. előadás, 2022.06.13.

18. A Riemann-integrál létezésének feltételei

Függvény alsó és felső burkolója. A burkoló függvények félig folytonosak, ezért Borel-mérhetők. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele. [Petruska, 76–80. o.]

A célunk annak a bizonyítása, hogy egy korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha a szakadási helyeinek halmaza Lebesgue-nullmértékű.

Félig folytonos függvények

Definíció (félig folytonos függvények)

Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.

- Az f függvény *felülről félig folytonos* (f.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha
$$\forall c > f(a) \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in B(a, \delta) \cap A \;\; f(x) < c.$$
- Az f függvény *alulról félig folytonos* (a.f.f.) az $a \in A$ pontban, ha
$$\forall c < f(a) \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in B(a, \delta) \cap A \;\; f(x) > c.$$

Megjegyzés

Ha $f(a)$ véges, akkor c helyett $f(a) \pm \varepsilon$-t is írhatunk:

- f f.f.f. a-ban $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta) \cap A \;\; f(x) < f(a) + \varepsilon$,
- f a.f.f. a-ban $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta) \cap A \;\; f(x) > f(a) - \varepsilon$.

Lemma

Legyen $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ és $a \in A$. Ezek ekvivalensek:

(1a) f f.f.f. az a pontban.

(1b) Bármely $c > f(a)$-ra a relatív belső pontja $f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$-nek.

(1c) $\limsup\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x) \leqslant f(a)$.

Hasonlóan, ezek is ekvivalensek:

(2a) f a.f.f. az a pontban.

(2b) Bármely $c < f(a)$-ra a relatív belső pontja $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$-nek.

(2c) $\liminf\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x) \geqslant f(a)$.

Bizonyítás. (1a) és (1b) ugyanaz, csak más nyelven. Mindkettő azt mondja, hogy

$$\forall c > f(a) \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap A \quad f(x) < c. \tag{$*$}$$

$(*) \Rightarrow$(1c): minden $c > f(a)$-hoz van olyan $r > 0$, hogy

$$\forall x \in B(a, r) \cap A \quad f(x) < c,$$

így az $x \to a$ határátmenetből

$$\forall c > f(a) \quad \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) \leqslant c,$$

A $c \to f(a) + 0$ határátmenetből $\limsup\limits_{x\to a,\ x\in A} f(x) \leqslant f(a)$,

(1c)$\Rightarrow$ $(*)$: a lim sup alaptulajdonsága, hogy

$$\forall c > \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x) \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap A \quad f(x) < c.$$

A feltevés szerint $f(a) \geqslant \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x)$; ha valami minden $c > \limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x)$-re igaz, akkor minden $c > f(a)$-ra is igaz.

Következmény

(1) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor f.f.f., ha bármely $c \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ relatív nyílt A-ban.

(2) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor a.f.f., ha bármely $c \in \mathbb{R}$-re $f^{-1}\big((c, \infty]\big)$ relatív nyílt A-ban.

(3) A félig folytonos függvények Borel-mérhetők.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ Ha f f.f.f. és $c \in \mathbb{R}$, akkor

$$x \in f^{-1}\big([-\infty, c)\big) \quad \Rightarrow \quad f(x) < c \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{int} f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$$

tehát $f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ minden pontja belső pont, tehát $f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ relatív nyílt.

(1) $\Leftarrow$: Bármely $a \in A$-ra

$$\forall c > f(a) \quad \Rightarrow \quad a \in \operatorname{int} f^{-1}\big([-\infty, c)\big),$$

tehát f f.f.f. az a pontban.

Alsó és felső burkolófüggvény

Definíció (függvény alsó és felső burkolója)

Legyen A az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^p$ vagy egy más metrikus tér részhalmaza és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Az f függvény *felső* és *alsó burkolója*

$$\begin{aligned}\overline{f}(a) &= \inf_{r>0} \Big(\sup f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \lim_{r\to+0} \Big(\sup f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big)\\ &= \max\Big(\limsup_{x\to a} f(x), f(a)\Big),\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\underline{f}(a) &= \sup_{r>0} \Big(\inf f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big) = \lim_{r\to+0} \Big(\inf f\big(B(a,r) \cap A\big)\Big)\\ &= \min\Big(\liminf_{x\to a} f(x), f(a)\Big).\end{aligned}$$

Ezek mind ugyanazt adják:

- Az $r \mapsto \sup f\big(B(a,r) \cap A\big)$ függvény monoton nő, ezért $\inf\sup\big(\ldots\big) = \lim\sup\big(\ldots\big)$;

•

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to+0} \sup f\big(B(a,r)\cap A\big) &= \lim_{r\to+0} \max\left(\sup f\big(\dot{B}(a,r)\cap A\big), f(a)\right)\\
&\overset{\max(x,y)\text{ folytonos}}{=} \max\left(\lim_{r\to+0} \sup f\big(\dot{B}(a,r)\cap A\big), \lim_{r\to+0} f(a)\right)\\
&= \max\left(\limsup_{x\to a,\ x\in A} f(x), f(a)\right).
\end{aligned}
$$

Lemma

(1) $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$;

(2) $\underline{f}(a) = \overline{f}(a)$ akkor és csak akkor, ha f folytonos a-ban (a folytonosságot ki kell terjesztenünk a $\pm\infty$ értékekre).

Bizonyítás.

(1) **triviális**🙊, mert

$$\underline{f}(a) = \min\left(\liminf_{x\to a} f(x), f(a)\right) \leqslant f(a) \leqslant \max\left(\limsup_{x\to a} f(x), f(a)\right) = \overline{f}(a).$$

(2) Ha $\underline{f}(a) = \overline{f}(a)$, akkor az (1) miatt $f(a)$ értéke is ugyanez, és

$$
\begin{aligned}
\limsup_{x\to a} f(x) \leqslant \max\left(\limsup_{x\to a} f(x), f(a)\right) = \overline{f}(a) = f(a) = \underline{f}(a) =\\
= \min\left(\liminf_{x\to a} f(x), f(a)\right) \leqslant \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x);
\end{aligned}
$$

ezeknek mind egyenlőknek kell lenni, tehát $\liminf\limits_{x\to a} f(x) = \limsup\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, tehát f folytonos a-ban.

Megfordítva, ha f folytonos a-ban, akkor $\liminf\limits_{x\to a} f(x) = \limsup\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ezért

$$\overline{f}(a) = \max\left(\limsup_{x\to a} f(x), f(a)\right) = f(a) \quad \text{és} \quad \underline{f}(a) = \min\left(\liminf_{x\to a} f(x), f(a)\right) = f(a).$$

Lemma

A felső burkoló f.f.f., az alsó burkoló a.f.f..

Bizonyítás.

- Az igazoljuk, hogy $\overline{f}$ f.f.f..

- Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges; azt kell igazolni, hogy $\overline{f}^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ relatív nyílt.
- Vegyünk egy tetszőleges $a \in \overline{f}^{-1}\big([-\infty, c)\big)$ pontot; az kell, hogy a ennek relatív belső pontja.
- A feltétel szerint $\overline{f}(a) < c$. Válasszunk egy c_1 számot is, amelyre $\overline{f}(a) < c_1 < c$.
- A felső burkoló definíciója miatt van olyan $r > 0$, hogy $\sup f(B(a,r)) < c_1$, tehát bármely $x \in B(a,r) \cap A$ esetén $f(x) < c_1$.
- Bármely $b \in B(a,r) \cap A$ pontban $f(b) < c_1$ és $\limsup\limits_{x \to b} f(x) \leqslant c_1$, tehát $\overline{f}(b) \leqslant c_1 < c$, tehát $b \in f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$.
- Ez minden b-re igaz, tehát $B(a,r) \cap A \subset f^{-1}\big([-\infty, c)\big)$.

Következmény

Az alsó és a felső burkoló is Borel-mérhető.

A Riemann-integrál létezésének feltételei

Lemma

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha $I_1, I_2, \ldots \subset [a,b]$ intervallum-sorozat, amelyeknek c közös belső pontja, és $|I_n| \to 0$, akkor $\inf\limits_{I_n} f \to \underline{f}(c)$ és $\sup\limits_{I_n} f \to \overline{f}(c)$.

Bizonyítás. Legyen

$$R_n = \min\big\{r > 0 : B(c,r) \supset I_n\big\}, \quad r_n = \max\big\{r > 0 : B(c,r) \subset I_n\big\}$$

Ezek 0-hoz tartanak.

A tartalmazás miatt

$$\sup f\big(B(c, r_n)\big) \leqslant \sup f\big(I_n\big) \leqslant \sup f\big(B(c, R_n)\big)$$

Végül rendőr-elv: az alsó és a felső becslés is $\overline{f}(c)$-hez tart.

Lemma

Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény; ekkor

$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x}_{\text{alsó Riemann-integrál}} = \underbrace{\int_{[a,b]} \underline{f} \,\mathrm{d}\lambda}_{\text{alsó burkoló L-integrálja}} \quad \text{és} \quad \underbrace{\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x}_{\text{felső Riemann-integrál}} = \underbrace{\int_{[a,b]} \overline{f} \,\mathrm{d}\lambda}_{\text{felső burkoló L-integrálja}}.$$

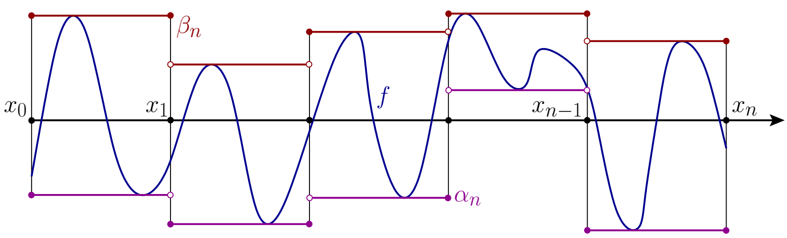
Bizonyítás.

- Az integrálok léteznek, mert a burkolók korlátosak és Borel-mérhetők.
- Minden pozitív egész n-re, osszuk fel az intervalumot n egyenlő részre az $a = x_{n,0} < x_{n,1} < \ldots < x_{n,n} = b$ pontokkal.
- Legyen

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} \inf_{[x_{n,i-1},x_{n,i}]} f & \text{ha } x \in (x_{n,i-1}, x_{n,i}) \\ \inf_{[x_{n,0},x_1]} f & \text{ha } x = x_0 \\ \inf_{[x_{n,i-1},x_{i+1}]} f & \text{ha } x = x_i,\ 0 < i < n \\ \inf_{[x_{n-1},x_n]} f & \text{ha } x = x_n \end{cases}$$

és

$$\beta_n(x) = \begin{cases} \sup_{[x_{n,i-1},x_{n,i}]} f & \text{ha } x \in (x_{n,i-1}, x_{n,i}) \\ \sup_{[x_{n,0},x_1]} f & \text{ha } x = x_0 \\ \sup_{[x_{n,i-1},x_{i+1}]} f & \text{ha } x = x_i,\ 0 < i < n \\ \sup_{[x_{n-1},x_n]} f & \text{ha } x = x_n. \end{cases}$$



- A felosztáshoz tartozó alsó és felső Riemann-integrálközelítő összegeket az α_n és β_n integráljaként is felírhatjuk:

$$s_n = \int_a^b \alpha_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \alpha_n \,\mathrm{d}\lambda, \qquad S_n = \int_a^b \beta_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \beta_n \,\mathrm{d}\lambda.$$

- Az előző Lemma miatt $\alpha_n(x) \to \underline{f}(x)$ és $\beta_n(x) \to \overline{f}(x)$ pontonként.

- A KKT miatt

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \alpha_n \,\mathrm{d}\lambda \overset{\text{KKT}}{=} \int_{[a,b]} \underline{f}\,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{és}$$

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \beta_n \,\mathrm{d}\lambda \overset{\text{KKT}}{=} \int_{[a,b]} \overline{f}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Tétel

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos.

(1) Az $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál akkor és csak akkor létezik, ha az $[a,b]$ intervallumon az f függvény λ-m.m. folytonos.

(2) Ha az $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál létezik, akkor f Lebesgue-mérhető, és $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda.$

Bizonyítás.

(1) A Riemann-integrál létezik $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\mu = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\mu$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{[a,b]} \underline{f}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} \overline{f}\,\mathrm{d}\lambda$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{[a,b]} (\overline{f} - \underline{f})\,\mathrm{d}\lambda = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overline{f} - \underline{f} = 0$ λ-m.m. $\Leftrightarrow$ $\overline{f} = \underline{f} = 0$ λ-m.m. $\Leftrightarrow$ f λ-m.m. folytonos.

(2) Ha a Riemann-integrál létezik, akkor $f = \underline{f}$ λ-m.m., tehát f λ-majdnem Borel-mérhető és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} \underline{f}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda.$$

Megjegyzés

Abból, hogy az $\int_a^b f$ Riemann-integrál létezik, nem következik, hogy f Borel-mérhető.
Például a Jordan-nullmértékű Cantor-halmaznak létezik nem Borel-mérhető N részhalmaza (mert csak kontinuum sok Borel-halmaz létezik).
A χ_N függvény Riemann-integrálható, de nem Borel-mérhető.

Megjegyzés

A bizonyítások átvihetők például a többdimenziós Jordan-mérték szerinti integrálokra.
Ha $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető és $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor az $\int_A f$ Riemann-integrál akkor és csak akkor létezik, ha f az A λ-m.m. pontjában folytonos. Ilyenkor f Lebesgue-mérhető is, és a Riemann- és a Lebesgue-integrál értéke ugyanaz.

IV. rész

Mértékek differenciálása

19. Előjeles mértékek variációi

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív variációt. [Petruska, 85–89. o.]

Eddig olyan mértékekkel foglalkoztunk, amelyeknek minden értéke nemnegatív. Most egy kicsit az olyan σ-additív halmazfüggvényeket fogjunk megvizsgálni, amelyek negatívak (sőt, komplexek) is lehetnek, mint például a gazdasági növekedés vagy az intelligencia.

Mindig ugyanazon az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk játszani.

Definíció (előjeles és komplex mérték, újra)

$\vartheta : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ előjeles mérték, ha $\vartheta(\varnothing) = 0$ és a ϑ függvény σ-additív.
$\vartheta : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ komplex mérték, ha $\vartheta(\varnothing) = 0$ és a ϑ függvény σ-additív. (Az értéke csak véges lehet.)

Példák

Hogy gyárthatunk előjeles és komplex mértékeket?
Pl. előjeles mértéket készíthetünk úgy, hogy vesszük két mérték különbségét: $\vartheta = \mu_1 - \mu_2$. Fontos, hogy $\mu_1(X)$ és $\mu_2(X)$ közül legalább az egyik véges legyen, hogy mindig el lehessen végezni a kivonást.
A komplex mértékeknek a valós és a képzetes része is egy-egy véges előjeles mérték. Ennek a mintájára gyárthatunk vektorértékű mértékeket is: minden koordináta egy-egy előjeles mérték...
Egy másik, nagyon fontos lehetőség, ha egy függvényt integrálunk: vegyünk egy f mérhető függvényt, egy μ mértéket, és legyen $\vartheta(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$.

Tétel

Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent.

Bizonyítás. Ha $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles mérték, és felveszi a $+\infty$ értéket, tehát $\vartheta(P) = \infty$ valamilyen $P \subset X$ halmazra, akkor az additivitás miatt $\vartheta(X) = \vartheta(P) + \vartheta(X \backslash P) = \infty$ (a jobboldalon csak összeadható mennyiségek lehetnek.)

Ha pedig $\vartheta(N) = -\infty$ valamilyen $N \subset X$ halmazra, akkor az additivitás miatt $\vartheta(X) = \vartheta(N) + \vartheta(X \backslash N) = -\infty$.

Definíció (marjoráns mérték)

Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mérték *majorálja* az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ előjeles/komplex mértéket, ha minden $A \in \mathcal{M}$-re $\left|\vartheta(A)\right| \leqslant \mu(A)$.

15

Variációk

Definíció (előjeles vagy komplex mérték totális variációja)

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ *előjeles mérték totális variációja*

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sup\left\{|\vartheta(B)| + |\vartheta(C)| : \ B, C \subset A, \ B \cap C = \varnothing\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_k)| : \ n \in \mathbb{N}, \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_k)| : \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing\right\}.\end{aligned}$$

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ *komplex mérték totális variációja*

$$\begin{aligned}\tau(A) &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\vartheta(B_n)| : \ n \in \mathbb{N}, \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\vartheta(B_n)| : \ n \in \mathbb{N}, \ B_k \subset A, \ B_k \cap B_\ell = \varnothing\right\}\end{aligned}$$

Definíció (előjeles mérték pozitív és negatív variációi)

Az $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ *előjeles mérték pozitív és negatív variációja*

$$\pi(A) = \sup\{\vartheta(B) : B \subset A\},$$

illetve

$$\nu(A) = \sup\{-\vartheta(B) : B \subset A\}.$$

Tétel

Legyen ϑ előjeles vagy komplex mérték, a totális variációja τ; ha előjeles mérték, akkor a pozitív és negatív variációi π, illetve ν.

1. τ, π, ν mértékek.
2. τ majorálja ϑ-t.
3. Ha ϑ előjeles mérték, akkor τ majorálja π-t és ν-t.
4. A τ a legkisebb mérték, ami majorálja ϑ-t.

Bizonyítás. (1a) π mérték: trivi, hogy $\pi(A) \geqslant \vartheta(\varnothing) = 0$, tehát $\pi \geqslant 0$. Az is trivi, hogy $\pi(\varnothing) = 0$. Azt kell bizonyítani, hogy π σ-additív. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ diszjunktak és $A = \bigsqcup A_n$. Azt kell igazolnunk, hogy $\pi(A) = \sum \pi(A_n)$.

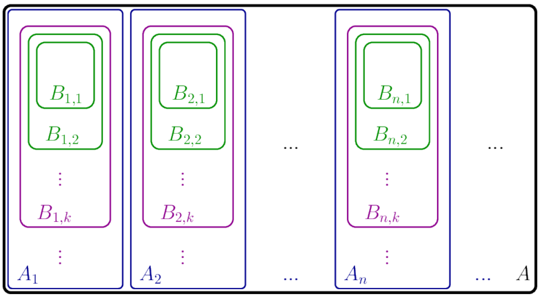
Mindegyik n-hez vegyünk egy olyan $B_{n,1}, B_{n,2}, \ldots \subset A_n$ sorozatot, amelyre $0 \leqslant \vartheta(B_{n,k}) \to \pi(A_n)$. Ekkor minden k-ra és N-re

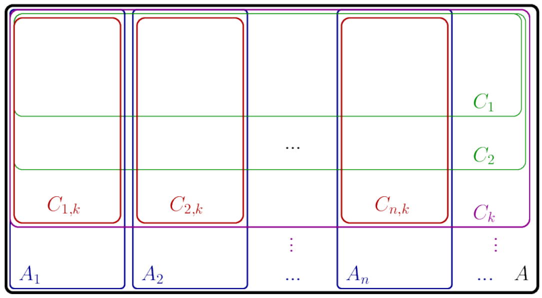
$$\sum_{n=1}^{N} \vartheta(B_{n,k}) = \vartheta\left(\bigsqcup_{n=1}^{N} B_{n,k}\right) \leqslant \pi(A).$$

Most $k \to \infty$, majd $N \to \infty$ határátmenet:

$$\sum_{n=1}^{N} \pi(A_n) \leqslant \pi(A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \leqslant \pi(A). \tag{$*$}$$





Megfordítva, legyen $C_1, C_2, \ldots \subset A$ olyan sorozat, amelyre $\vartheta(C_k) \to \pi(A)$, és legyen $C_{n,k} = A_n \cap C_k$. Ekkor

$$\vartheta(C_k) = \vartheta\Bigg(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k}\Bigg) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n);$$

A $k \to \infty$ határátmenetből

$$\pi(A) = \lim_{k\to\infty} \vartheta(C_k) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n). \tag{$**$}$$

Az $(*)$ és $(**)$ együtt azt adja, hogy $\pi(A) = \sum \pi(A_n)$.

(1b) τ mérték: $\tau(\varnothing) = 0$, és triviális, hogy $\tau(A) \geqslant \vartheta(\varnothing) = 0$; most is a σ-additivitás kell; Legyen megint $A = \bigsqcup A_n$.

Mindegyik A_n-hez és mindegyik k-hoz vegyük $\tau(B_n)$-nek egy közelítő összegét úgy, hogy ezek $k \to \infty$ esetén $\tau(B_n)$-hez tartsanak, vagyis vegyük $B_{n,k,\ell} \subset A_n$ halmazok sorozatának egy sorozatát úgy, hogy mindegyik n, k-ra a $B_{n,k,1}, B_{n,k,2}, \ldots \subset A_n$ halmazok diszjunktak, és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})| = \tau(A_n)$. Rögzített k-ra a $B_{n,k,\ell}$ halmazok diszjunkt részei A-nak, ezért minden N-re

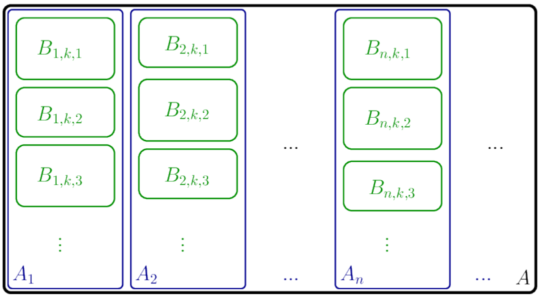
$$\sum_{n=1}^{N} \Bigg(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(B_{n,k,\ell})| \Bigg) \leqslant \tau(A).$$

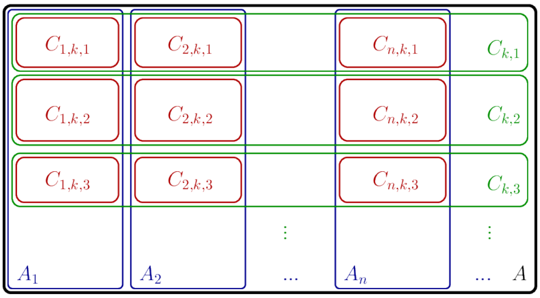
$k \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{N} \tau(A_n) \leqslant \tau(A).$$

$N \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n) \leqslant \tau(A).$$





A megfordításhoz vegyük $\tau(A)$ közelítő összegeinek egy sorozatát, vagyis $C_{k,\ell} \subset A$ halmazokat úgy, hogy rögzített k-ra $C_{k,1}, C_{k,2}, \ldots$ diszjunktak, és $\lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \tau(A)$. Legyen $C_{n,k,\ell} = A_n \cap C_{k,\ell}$.

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{k,\ell})| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \vartheta\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,k,\ell} \right) \right| = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(C_{n,k,\ell}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta(C_{n,k,\ell})| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |\vartheta(C_{n,k,\ell})| \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$$

$k \to \infty$:

$$\tau(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n).$$

Az triviális, hogy τ majorál, és a legkisebb.

20. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. [Petruska, 85–89. o.]

20.1 Lemma

Minden előjeles mértéknek van maximuma és minimuma, avagy:
Ha ϑ előjeles mérték, akkor léteznek olyan $A, B \subset X$ halmazok, amelyekre $\vartheta(A) = \pi(X)$ és $\vartheta(B) = -\nu(X)$.

Azt eddig is tudtuk, hogy $-\nu(X) \leqslant \vartheta(A) \leqslant \pi(X)$; az a kérdés, hogy ϑ felveszi-e a $\pi(X)$ és $-\nu(X)$ értékeket.
Bizonyítás. A π-re bizonyítunk.

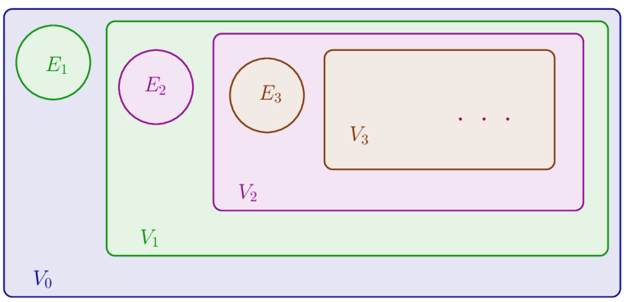
1. eset: $\pi(X) = \infty$, azaz ϑ nem korlátos felülről. Olyan A halmazt keresünk, amelyre $\vartheta(A) = \infty$.

Nevezzünk egy $V \in \mathcal{M}$ halmazt "végtelennek", ha $\pi(V) = \infty$, és egy végtelen V halmazt "bonthatónak" (v.ö. "Rontom-bontom, kisnyulacska!"[1]), ha vannak olyan E és W diszjunkt részhalmazai, amelyekre $\vartheta(E) \geqslant 1$ és $\pi(W) = \infty$.
Vegyük észre, hogy nem bontható végtelen halmaznak a végtelen részhalmazai sem bonthatók.

1a. eset: Minden végtelen halmaz bontható, beleértve az X-et is. Ekkor bontva és tovább bontva

$$X \supset E_1 \sqcup V_1 \supset E_1 \sqcup (E_2 \sqcup V_2) \supset E_1 \sqcup (E_2 \sqcup (E_3 \sqcup V_3)) \supset \ldots;$$

de akkor $E_1, E_2, \ldots$ diszjunkt halmazok, mindegyikre $\vartheta(E_n) \geqslant 1$, így az $A = \bigcup E_n$ halmazra $\vartheta(A) = \sum \vartheta(E_n) = \infty = \pi(X)$.



1b. eset: Van nem bontható végtelen halmaz. Legyen V_0 egy ilyen.

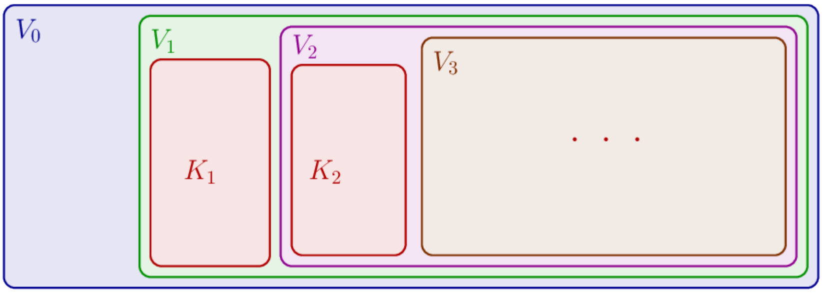
[1] Ez a fenyegetés annyit tesz, mint "Agyonverlek és kibelezlek, nyuszikám"; inkább ne mondjuk a gyerekünknek. :-)

↯0.4Narancs Indirekt tegyük fel, hogy ϑ értéke soha sem ∞.

Készítünk egy $V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ sorozatot nem bontható végtelen halmazokból. V_0 már megvan.

Ha V_n már megvan, akkor válasszunk egy olyan $V_{n+1} \subset V_n$ halmazt, amelyre $\vartheta(V_{n+1}) > \max(\vartheta(V_n) + 1, 1)$; ilyen halmaz biztosan létezik, mert $\vartheta(V_n)$ véges és $\pi(V_n) = \infty$.

A V_n halmaz két fele a V_{n+1} és $V_n \backslash V_{n+1}$. Mivel π additív, valamelyik fél halmaz végtelen. Az első felére $\vartheta(V_{n+1}) \geqslant 1$. Mivel a V_n nem bontható, a másik fél nem lehet végtelen. Tehát V_{n+1} is végtelen halmaz, ráadásul része a nem bontható V_n-nek, tehát ő sem bontható.



Most legyen $K_n = V_n \backslash V_{n+1}$; ekkor

$$\vartheta(K_n) = \vartheta(V_n) - \vartheta(V_{n+1}) < -1,$$

az $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ halmazra ezért $\vartheta(N) = \sum \vartheta(K_n) = -\infty$. Az N és V_1 halmazokra $N \subset V_1$, $\vartheta(N) = -\infty$ és $\vartheta(V_1) > 0$, de az lehetetlen, hogy a pozitív mértékű V_0-nak legyen egy $-\infty$ mértékű részhalmaza, ellentmondás. ↯0.4EUkek

2. eset: $\pi(X)$ véges, azaz ϑ felülről korlátos.

Szükségünk lesz a következő becslésre: ha $\vartheta(H) \geqslant \pi(X) - \varepsilon$, és $R \subset H$, akkor

$$\vartheta(R) = \vartheta(H) - \vartheta(H \backslash R) \geqslant (\pi(X) - \varepsilon) - \pi(X) = -\varepsilon.$$

Vegyünk minden n pozitív egészhez egy $P_n \in \mathcal{M}$ halmazt, amire $\vartheta(P_n) \geqslant \max(\pi(X) - \frac{1}{2^n}, 0)$. Legyen $Q_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} P_n$ (a Q_n sorozat csökkenő) és $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$.[2]

Bármely k-ra

$$Q_k = P_k \cup \Big(P_{k+1} \backslash P_k\Big) \cup \Big(P_{k+2} \backslash (P_k \cup P_{k+1})\Big) \cup \Big(P_{k+3} \backslash (P_k \cup P_{k+1} \cup P_{k+2})\Big) \cup \ldots$$

[2] A $\limsup P_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} P_n \right)$ halmazt hívjuk a P_n halmazsorozat *limesz szuperior*ának: azokból a pontokból áll, amelyek végtelen sok P_n halmaznak elemei.

A sorozat *limesz inferiora* $\liminf P_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=k}^{\infty} P_n \right)$, ez azokból a pontokból áll, amelyek véges sok kivétellel minden P_n halmaznak elemei.

ezért

$$\pi(X) \geqslant \vartheta(Q_k) = \vartheta(P_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \vartheta\left(P_n \setminus \bigcup_{\ell=k}^{n-1} P_\ell\right) > \left(\pi(X) - \frac{1}{2^k}\right) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{-1}{2^n} = \pi(X) - \frac{2}{2^k}$$

Ezek után

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \pi(X) - \vartheta(A) &< \left(\vartheta(Q_k) + \frac{2}{2^k}\right) - \vartheta(A) = \vartheta(Q_k \setminus A) + \frac{2}{2^k} = \\ &= \vartheta\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (Q_n \setminus Q_{n+1})\right) + \frac{2}{2^k} = \sum_{n=k}^{\infty} \big(\vartheta(Q_n) - \vartheta(Q_{n+1})\big) + \frac{2}{2^k} < \\ &< \sum_{n=k}^{\infty} \left(\pi(X) - \left(\pi(X) - \frac{2}{2^{n+1}}\right)\right) + \frac{2}{2^k} = \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}}\right) + \frac{2}{2^k} = \frac{4}{2^k}. \end{aligned}$$

Végül $k \to \infty$: látjuk, hogy $\vartheta(A) = \pi(X)$.

Következmény

$\pi(X)$ és $\nu(X)$ közül legalább az egyik véges.

Bizonyítás. A 20 lemma szerint $\pi(X)$ és $-\nu(X)$ is értéke ϑ-nak, de a 19 tétel szerint nem lehet mindkettő végtelen.

Tétel (Hahn-felbontás (Hans Hahn, 1879–1934))

Ha ϑ előjeles mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren, akkor X felbontható két diszjunkt részre: $X = P \cup N$ úgy, hogy a P mérhető részhalmazain $\vartheta \geqslant 0$, és az N mérhető részhalmazain $\vartheta \leqslant 0$.
Avagy, ha a ϑ pozitív és negatív variációi π és ν, akkor $\pi(N) = 0$ és $\nu(P) = 0$.

Bizonyítás. 1. eset: $\pi(X) < \infty$.

Legyen $P \subset X$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta(P) = \pi(X)$ és legyen $N = X \setminus P$.

Tetszőleges $H \subset P$ esetén $\vartheta(H) = \vartheta(P) - \vartheta(P \setminus H) \geqslant \pi(X) - \pi(X) = 0$, így valóban $\nu(P) = 0$.

Tetszőleges $H \subset N$ esetén $\vartheta(H) = \vartheta(P \cup H) - \vartheta(P) \leqslant \pi(X) - \pi(X) = 0$, így valóban $\pi(N) = 0$.

2. eset: $\pi(X) = \infty$. Ekkor $\nu(X)$ véges, felcseréljük P és N definícióját.

Kérdés

Egyértelmű-e a Hahn-felbontás?
Nem, de τ-majdnem: ha $X = P_1 \cup N_1 = P_2 \cup N_2$ két Hahn-felbontás, akkor a $P_1 \triangle P_2 = N_1 \triangle N_2 = (P_1 \cup P_2) \cap (N_1 \cup N_2)$ halmazon $\pi = \nu = 0$, vagyis $\tau(P_1 \triangle P_2) = 0$; a szimetrikus differencia részhalmazain ϑ konstans 0.

Következmény

$\pi(A) = \vartheta(A \cap P)$ és $\nu(A) = -\vartheta(A \cap N)$.

Bizonyítás. Bármilyen $B \subset A$-ra

$$\vartheta(B) = \vartheta(B \cap P) + \vartheta(B \cap N) \leqslant \vartheta(B \cap P) + \vartheta((A \cap B \cap P) + 0 = \vartheta(A \cap P).$$

Ha $B = A \cap P$, akkor egyenlőség van. Tehát

$$\pi(A) = \max\left\{\vartheta(B) : B \subset A\right\} = \vartheta(A \cap P).$$

16

Következmény (Jordan-felbontás (Marie Ennemond Camille Jordan 1838–1922))

Ha ϑ előjeles mérték, a pozitív és negatív variációi π és ν, akkor

$$\vartheta = \pi - \nu.$$

Bizonyítás. Legyen a Hahn-felbontás $X = P \cup N$. Bármilyen H mérhető halmazra

$$\vartheta(H) = \vartheta(H \cap P) + \vartheta(H \cap N) = \pi(H) - \nu(H).$$

Következmény

Ha ϑ előjeles mérték, a pozitív, negatív és totális variációi π, ν és τ, akkor

$$\tau = \pi + \nu.$$

Bizonyítás. Legyen a Hahn-felbontás $X = P \cup N$. Bármilyen H mérhető halmazra és bármilyen $A, B \subset H$ diszjunkt részeire

$$\left|\vartheta(A)\right| + \left|\vartheta(B)\right| \leqslant \Big(\left|\vartheta(A \cap P)\right| + \left|\vartheta(A \cap N)\right|\Big) + \Big(\left|\vartheta(B \cap P)\right| + \left|\vartheta(B \cap N)\right|\Big) =$$
$$= \big(\pi(A) + \nu(A)\big) + \big(\pi(B) + \nu(B)\big) = \pi(A \cup B) + \nu(A \cup B) \leqslant \pi(H) + \nu(H);$$

például ha $A = H \cap P$ és $B = H \cap N$, akkor egyenlőség van. Ezért

$$\tau(H) = \max\left\{|\vartheta(A)| + |\vartheta(B)| : A, B \subset H \text{ diszjunktak}\right\} = \pi(H) + \nu(H).$$

Következmény

$\vartheta(X)$ akkor és csak akkor véges, ha $\pi(X)$ és $\nu(X)$ véges.
Minden komplex mérték totális variációja véges.

Példa

Tegyük fel, hogy f mérhető az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren és minden $A \in \mathcal{M}$ esetén $\vartheta(A) = \int_A f\, d\mu$. Ekkor

- $(X, \mathcal{M}, \vartheta)$ Hahn-felbontása $P = \{x : f(x) \geqslant 0\}$, $N = \{x : f(x) < 0\}$.
- $\pi(A) = \int_A f_+ \,\mathrm{d}\mu$ és $\nu(A) = \int_A f_- \,\mathrm{d}\mu$,
- $\tau(A) = \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_A (f_+ + f_-) \,\mathrm{d}\mu = \pi(A) + \nu(A)$,
- $\vartheta(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A (f_+ - f_-) \,\mathrm{d}\mu = \pi(A) - \nu(A)$.

Az előjeles mérték, mint integrál

Következmény

Ha ϑ előjeles mérték, a pozitív, negatív és totális variációi π, ν és τ, akkor bármely $A \in \mathcal{M}$ mérhető halmazra

$$\vartheta(A) = \int_A (\chi_P - \chi_N) \,\mathrm{d}\tau.$$

Tehát, minden előjeles mérték előáll, mint egy függvény integrálja valamilyen mérték szerint.

Kérdés (V)

ajon igaz-e valami hasonló összefüggés komplex mértékekre? Avagy, ha ϑ komplex mérték, akkor létezik-e olyan mérhető f függvény, amelyre $|f| = 1$, és bármely A mérhető halmazra

$$\vartheta(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\tau?$$

21. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség. [Petruska, 90–91. o.]

A következő fejezetekben azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen előjeles és komplex mértékek írhatók fel, mint valamilyen függvény integrálja egy megadott mérték szerint.

Vegyük elő újra azt az esetet, amikor mértéket valamilyen függvény integráljaként definiáltunk: mondjuk $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, f olyan mérhető függvény, amelynek létezik integrálja X-en, és bármely $A \in \mathcal{M}$-re $\vartheta(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$. Speciálisan, ha $f : R \to \overline{R}$ Borel-mérhető, és létezik a Lebesgue-integrálja, akkor $\vartheta(A) = \int_A f \mathrm{d}\lambda$ egy előjeles Borel-mérték.

Könnyű mutatni olyan mértéket, amely nem áll elő Lebesgue-integrál alakban, pl. a számlálómérték, vagy a Dirac-delta ($\delta(A) = 1$, ha $0 \in A$, egyébként 0). Nincs olyan Borel- vagy Lebesgue-mérhető f függvény, amelyre $\int_A f \mathrm{d}\lambda = |A|$ vagy $\int_A f \mathrm{d}\lambda = \delta(A)$ teljesülhetne.

Mindkét példánkban közös, hogy van egy olyan λ-nullmértékű A halmaz, amelyben $\vartheta(A) \neq 0$. Márpedig nullmértékű halmazon az integrál is nulla.

Abszolút folytonos és szinguláris mértékek

Most is egy közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren fogunk dolgozni.

Definíció (előjeles/komplex mérték tartója)

Az $A \in \mathcal{M}$ halmaz a ϑ előjeles/komplex mértéknek *tartója*, ha (ezek ekvivalensek):

- az $X \setminus A$ halmazon ϑ konstans 0
- bármely $H \in \mathcal{M}$ halmazra $\vartheta(H) = \vartheta(H \cap A)$.

Például az $X = P \cup N$ Hahn-felbontásban π-nek a P, a ν-nek N egy tartója.

Definíció (abszolút folytonos és szinguláris mértékek)

Legyen α és β két mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.

(1) Az α *abszolút folytonos* a β-ra nézve, ha bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén, ha $\beta(H) = 0$, akkor $\alpha(H) = 0$. Jele: $\alpha \ll \beta$.

(2) Az α és a β *szinguláris* egymásra nézve, ha (ezek ekvivalensek):

- α-nak van β-nullmértékű tartója
- β-nak van α-nullmértékű tartója
- X felbomlik két diszjunkt halmazra, $X = A \cup B$ úgy, hogy az α-nak A, a β-nak B tartója, vagyis $\alpha|_B = 0$ és $\beta|_A = 0$.

Jele: $\alpha \perp \beta$.

(3) Ha előjeles vagy komplex mértékekről van szó, akkor azt követeljük meg, hogy az α totális variációja legyen abszolút folytonos, illetve szinguláris a β totális variációja szerint. Ez megfelel annak, hogy ha egy előjeles mérték a H halmaz minden részén 0, akkor a totális variációja is 0.

Példák

Ha $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, és μ mérték, akkor a $\varphi(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu$ előjeles mérték abszolút folytonos μ-re nézve.
Ha μ majorálja a ϑ előjeles mértéket, akkor $\vartheta \ll \mu$.
Ha ϑ előjeles mérték, és a variációi τ, π és ν, akkor $\tau \ll \vartheta$, $\pi \ll \tau$, $\nu \ll \tau$, $\pi \ll \vartheta$, $\nu \ll \vartheta$, $\pi \perp \nu$.

Lemma

1. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\alpha \perp \beta$, akkor $\alpha = 0$.
2. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \ll \gamma$, akkor $\alpha \ll \gamma$. ($\ll$ egy tranzitív reláció, mint például az *osztója*, a *részhalmaza* vagy a *megette*.)
3. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geqslant 0$ mértékek, akkor $\alpha_1 \ll \sum \alpha_k$.
4. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ll \beta$ és $\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ előjeles mértékek, akkor $\vartheta \ll \beta$.
5. Ha $\alpha \ll \beta$ és $\beta \perp \gamma$, akkor $\alpha \perp \gamma$.
6. Ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \perp \beta$ és $\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ előjeles mértékek, akkor $\vartheta \perp \beta$.

Bizonyítás. 1. Legyen α és β egy-egy, diszjunkt tartója A, illetve B. Bármely H-ra $\alpha(H \setminus A) = 0$, mert az A halmaz tartója α-nak; továbbá $\beta(H \cap A) = 0$, mert A diszjunkt β tartójától. De $\alpha \ll \beta$ miatt ebből következik, hogy $\alpha(H \cap A) = 0$. Így $\alpha(H) = \alpha(H \setminus A) + \alpha(H \cap A) = 0$.

2. Ha $\gamma(H) = 0$, akkor $\beta(H) = 0$, de akkor $\alpha(H) = 0$.

3. A tagot majorálja az összeg.

4. Ha $\beta(H) = 0$, akkor minden k-ra $\alpha_k(H) = 0$, de akkor ezek összege is 0.

5. Legyen β és γ egy-egy diszjunkt tartója B, illetve C. A B-n kívül β konstans 0, de akkor α is. Ezért B az α mértéknek is tartója.

6. Mindegyik α_n-nek van egy τ_β-nullmértékű A_n tartója. Az $A = \bigcup A_n$ halmaz tartója a $\sum \alpha_n$ mértéknek, és β-nullmértékű.

Lebesgue-felbontás

Tétel (Lebesgue-felbontás)

Legyen ϑ σ-véges előjeles vagy komplex mérték, $\mu \geqslant 0$ mérték a közös $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren.
Ekkor ϑ egyértelműen felbontható egy μ-re nézve abszolút folytonos és egy μ-re nézve szinguláris előjeles, illetve komplex mérték összegére, azaz egyértelműen vannak olyan α és β előjeles, illetve komplex mértékek úgy, hogy

$$\vartheta = \alpha + \beta, \quad \alpha \ll \mu \quad \text{és} \quad \beta \perp \mu.$$

Megjegyzés

A tételben azt is ki szokták kötni, hogy μ σ-véges, de erre nem lesz szükségünk.

Bizonyítás.

1. eset: ϑ véges.

Konstruálunk egy maximális szinguláris mértéket; ez lesz β, a maradék pedig α.

Legyen ϑ totális variációja τ, legyen $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\}$ a μ-nullmértékű halmazok gyűrűje, és legyen

$$s = \sup\{\tau(N) : N \in \mathcal{N}\}.$$

A jobboldalon a halmazban szerepel a $0 = \tau(\emptyset)$, így a definíció értelmes, és $s \geqslant 0$. Az is igaz, hogy bármely $N \in \mathcal{N}$-re $\tau(N) \leqslant \tau(X)$, így $s \leqslant \tau(X)$, ami véges.

A szuprémumot tetszőleges pontossággal megközelíthetjük: minden pozitív egész n-hez van egy olyan $Z_n \in \mathcal{N}$ halmaz, amelyre $\tau(Z_n) > s - \frac{1}{n}$. Legyen $Z = \bigcup Z_n$; ez megszámlálható sok μ-nullmértékű halmaz uniója, ez is μ-nullmértékű: $Z \in \mathcal{N}$.

Bármely n-re $Z_n \subset Z$; a τ monotonitása miatt

$$\forall n \qquad s - \frac{1}{n} < \tau(Z_n) \leqslant \tau(Z) \leqslant s,$$

az $n \to \infty$ határátmenetből

$$\tau(Z) = s.$$

Tehát a szuprémum valójában maximum.

Ezek után legyen $H \in \mathcal{M}$ esetén

$$\alpha(H) = \vartheta(H \backslash Z), \qquad \beta(H) = \vartheta(H \cap Z),$$

Az világos, hogy $\alpha(H) + \beta(H) = \vartheta(H)$.

A Z halmaz a β mértéknek μ-nullmértékű tartója, tehát $\beta \perp \mu$.

Annak igazolásához, hogy $\alpha \ll \mu$, vegyünk egy tetszőleges μ-nullmértékű N halmazt. Erre $N \cup Z$ is μ-nullmértékű, és

$$0 \leqslant \left|\alpha(N)\right| = \left|\vartheta(N \backslash Z)\right| \leqslant \tau(N \backslash Z) = \tau(N \cup Z) - \tau(Z) \leqslant s - s = 0.$$

Tehát, ha $\mu(N) = 0$, akkor $\alpha(N) = 0$; tényleg $\alpha \ll \mu$.

Az egyértelműség bizonyítása:

Tegyük fel, hogy kétféle Lebesgue-felbontás is van:

$$\vartheta = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2.$$

Ekkor az

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$$

mérték egyszerre abszolút folytonos és szinguláris, vagyis konstans 0.

2. eset: ϑ σ-véges.

Bontsuk fel az alaphalmazt megszámlálható sok, páronként diszjunkt ϑ-véges cellára: $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Mindegyik X_n cellán a $\vartheta\big|_{X_n}$ mérték véges, így van egy egyértelmű Lebesgue-felbontása: $\vartheta\big|_{X_n} = \alpha_n + \beta_n$. Ezeket próbáljuk — kellő óvatossággal — összeadni.

Az α_n és β_n-nek diszjunkt tartója is létezik: legyen α_n tartója $A_n \subset X_n$, a β_n tartója $B_n \subset X_n$, ekkor tehát $H \subset X_n$ esetén $\alpha_n(H) = \vartheta(H \cap A_n)$ és $\beta_n(H) = \vartheta(H \cap B_n)$.

Ezek után legyen $A = \bigcup A_n$, $B = \bigcup B_n$,

$$\alpha(H) = \vartheta(H \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(H \cap X_n),$$

$$\beta(H) = \vartheta(H \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(H \cap B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(H \cap X_n).$$

Világos hogy ez a definíció értelmes, $\alpha + \beta = \vartheta$, $\alpha \ll \mu$ és $\beta \perp \mu$.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $\alpha_1 + \beta_1$ és $\alpha_2 + \beta_2$ is Lebesgue-felbontás; ekkor mindegyik X_n-re megszorítva a $\vartheta\big|_{X_n}$ mértéknek Lebesgue-felbontása a $\alpha_1\big|_{X_n} + \beta_1\big|_{X_n}$ és $\alpha_2\big|_{X_n} + \beta_2\big|_{X_n}$. A véges esetben a felbontás egyértelmű, ezért $\alpha_1\big|_{X_n} = \alpha_2\big|_{X_n}$ és $\beta_1\big|_{X_n} = \beta_2\big|_{X_n}$; de ezeket összeadva visszakapjuk az eredeti mértékeket.

Megjegyzés

Ha ϑ nem σ-véges, akkor nem biztos, hogy létezik Lebesgue-felbontás. Legyen például $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$ és ϑ a számlálómérték. Bármely pont Lebesgue-mértéke 0, a számlálómértéke poztív, így az abszolút folytonos rész tartója csak az üres halmaz lehetne. A szinguláris rész tartója csak Lebesgue-nullmértékű lehet. Ez a kettő együtt nem adhatja ki a teljes $\mathbb{R}$-et.

22. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói. [Petruska, 91–95. o.]

Definíció (Radon–Nikodym derivált)

Legyen $\mu \geqslant 0$ mérték, és legyen ϑ előjeles vagy komplex mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren. Az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, illetve $f : X \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt a ϑ mérték μ szerinti *Radon–Nikodym deriváltjának* nevezzük, ha bármely $H \in \mathcal{M}$-re $\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$.

Használatos az $f = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}$ jelölés is: $\int_H \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int_H \mathrm{d}\alpha$.

Megjegyzés

A Radon–Nikodym-derivált létezésének triviális szükséges feltétele, hogy $\vartheta \ll \mu$ legyen, mert nullmértékű halmazokon az integrál is mindig nulla.
Ugyanakkor az abszolút folytonosság önmagában nem elég. Pl. $\mathbb{R}$ Borel-halmazain nem létezik a Lebesgue-mértéknek Radon–Nikodym-deriváltja a számlálómérték szerint, mert

$$\int_H f \mathrm{d}|.| = \sum_{a \in H} f(a),$$

és az egyelemű halmazokra ez azt adja, hogy f konstans 0, de a konstans 0 integrálja minden halmazon 0.

Tétel (Radon–Nikodym)

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ szigma-véges mérték, és legyen α előjeles vagy komplex mérték az $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren, és tegyük fel, hogy $\alpha \ll \mu$.
Ekkor létezik a $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\mu}$ Radon–Nikodym derivált, vagyis létezik olyan $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, illetve $X \to \mathbb{C}$ μ-mérhető függvény, amelyre bármely $H \in \mathcal{M}$ esetén $\alpha(H) = \int_H f \mathrm{d}\mu$.
A Radon–Nikodym derivált μ-majdnem egyértelmű, vagyis ha f és g is Radon–Nikodym derivált, akkor $f = g$ μ-m.m.

Bizonyítás. I.a eset: $\alpha \geqslant 0$, mindkét mérték véges.

Legyen

$$\Phi = \left\{ f : X \to [0, \infty] \ \text{ mérhető}, \ f \geqslant 0, \ \forall H \in \mathcal{M} \quad \int_H f \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H) \right\}$$

a sehol sem túl nagy függvények halmaza, és

$$s = \sup \left\{ \int_X f \mathrm{d}\mu : f \in \Phi \right\}$$

Világos, hogy $0 \leqslant s \leqslant \alpha(X)$.

(1) $0 \in \Phi$ (trivi).

(2) Ha $g, h \in \Phi$, akkor $m = \max(g, h) \in \Phi$.

Biz. Legyen $A = X(g \geqslant h)$ és $B = X(g < h)$. Bármely H-ra

$$\int_H m \mathrm{d}\mu = \int_{H \cap A} g \mathrm{d}\mu + \int_{H \cap B} h \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H \cap A) + \alpha(H \cap B) = \alpha(H).$$

(3) Ha $g_1, g_2, \ldots \in \Phi$ és $g_1 \leqslant g_2 \leqslant \ldots$, akkor $h = \lim g_n \in \Phi$.

Biz. Bármely $H \in \mathcal{M}$-re és n-re

$$\int_H g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H);$$

A monoton konvergencia tételből

$$\int_H h \mathrm{d}\mu \overset{\text{mkt}}{=} \lim \int_H g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H).$$

(4) Van olyan $f \in \Phi$, amelyre $\int_X f \mathrm{d}\mu = s$. Avagy, a szuprémum maximum is.

Biz. Vegyünk egy olyan $g_1, g_2, \ldots \in \Phi$ sorozatot, amelyre $\int_X g_n \mathrm{d}\mu \to s$, és legyen

$f_n = \max(g_1, \ldots, g_n) \in \Phi$. Ekkor $0 \leqslant g_n \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$; legyen $f = \lim f_n$. Ekkor $\int_X g_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_n \mathrm{d}\mu \leqslant s$; a rendőr-elv miatt $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to s$. A monoton konvergencia tétel miatt $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim \int_X f_n \mathrm{d}\mu = s$.

(5) $s = \alpha(X)$.

Biz: indirekt. tegyük fel, hogy $s < \alpha$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ amire $\varepsilon \cdot \mu(X) < \alpha(X) - s = \alpha(X) - \int_X f \mathrm{d}\mu$.

Legyen

$$\varphi(H) = \alpha(H) - \int_H (f + \varepsilon) \mathrm{d}\mu = \alpha(H) - \int_H f \mathrm{d}\mu - \varepsilon \cdot \mu(H).$$

Ekkor φ előjeles mérték, $\varphi \ll \mu$ és $\varphi(X) > 0$.

Legyen φ Hahn-felbontása $X = P \cup N$. Ekkor tehát bármely $H \subset P$ esetén $\varphi(H) \geqslant 0$, azaz $\int_H (f+\varepsilon)\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H)$.

Mivel $\varphi(X) > 0$, ezért $\varphi(P) > 0$; viszont $\varphi \ll \mu$ miatt ebből következik, hogy $\mu(P) > 0$.

Legyen most $g = f + \varepsilon \cdot \chi_P$. Ez a függvény Φ-beli, mert bármely $H \in \mathcal{M}$-re

$$\int_H g\mathrm{d}\mu = \int_{H\cap N} f\mathrm{d}\mu + \int_{H\cap P} (f+\varepsilon)\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha(H\cap N) + \alpha(H\cap P) = \alpha(H).$$

Ugyanakkor

$$\int_X g\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \varepsilon\cdot\mu(P) > \int_X f\mathrm{d}\mu = s,$$

ellentmondás.

(6) Ha $\int_X f\mathrm{d}\mu = s$, akkor minden H-ra $\alpha(H) = \int_H f\mathrm{d}\mu$.

Biz. $\varphi(H) = \alpha(H) - \int_H f\mathrm{d}\mu \geqslant 0$ mérték, de $\varphi(X) = 0$, tehát $\varphi = 0$.

I.b eset: α véges előjeles mérték.

Vegyük α Jordan-felbontását: $\alpha = \pi - \nu$, végesek. Mivel $\pi, \nu \ll \alpha \ll \mu$, a pozitív és negatív variációnak is létezik Radon–Nikodym deriváltja.

I.c eset: α véges komplex mérték.

Az α valós és képzetes része is véges, abszolút folytonos mérték, van Radon–Nikodym deriváltjuk.

Egyértelműség:

Elég a valós esetre. Ha f és g is Radon–Nikodym derivált, akkor legyen $A = X(f > g)$ és $B = X(f < g)$. Ekkor

$$\int_A (f-g)\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu - \int_A g\mathrm{d}\mu = \alpha(A) - \alpha(A) = 0;$$

A baloldalon az integrandus pozitív; az integrál csak úgy lehet 0, ha $\mu(A) = 0$. Hasonlóan látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Így hát $f = g$ μ-m.m.

II.a eset: α előjeles, és σ-véges.

Legyen α Jordan-felbontása $\alpha = \pi - \nu$.

Osszuk fel a teret diszjunkt cellákra: $X = \bigcup X_n$ úgy, hogy minden cellán α és μ is véges. Mindegyik X_n cellán van π-nek és ν-nek is Radon–Nikodym deriváltja; legyenek ezek

$$g_n = \frac{\mathrm{d}\,\pi|_{X_n}}{\mathrm{d}\,\mu|_{X_n}} \quad \text{és} \quad h_n = \frac{\mathrm{d}\,\nu|_{X_n}}{\mathrm{d}\,\mu|_{X_n}};$$

ezekből készítsünk egy-egy nagy közös g, illetve h függvényt, amelynek a cellákra vett megszorításai a RND-k:

$$g(x) = g_n(x) \quad \text{ha } x \in X_n; \qquad h(x) = h_n(x) \quad \text{ha } x \in X_n.$$

Azt állítjuk, hogy $f = g - h$ jó lesz.

Bármely H-ra

$$\pi(H) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(H \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H \cap X_n} g_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{H \cap X_n} g \mathrm{d}\mu = \int_H g \mathrm{d}\mu$$

és ugyanígy

$$\nu(H) = \int_H h \mathrm{d}\mu.$$

A $\pi(X)$ és $\nu(X)$ közül az egyik véges, ezért g és h közül valamelyik μ-m.m. véges, ezért

$$\alpha(H) = \pi(H) - \nu(H) = \int_H g \mathrm{d}\mu - \int_H h \mathrm{d}\mu = \int_H (g - h) \mathrm{d}\mu = \int_H f \mathrm{d}\mu.$$

Egyértelműség: az f μ-majdnem egyértelmű mindegyik cellán, tehát a megszámlálható sok cellán együtt is.

II.b eset: α komplex, σ-véges.

Külön-külön létezik és m. egyértelmű a valós és a képzetes rész Radon–Nikodym deriváltja.

III. eset: α nem σ-véges.

Feltehetjük, hogy $\alpha(X) = \infty$ (a másik eset a $-\infty$ lenne). Azt állítjuk, hogy X felbontható két részre: $X = S \cup V$ úgy, hogy S-en α σ-véges, a V részhalmazain pedig $\alpha(H) = \infty$ ha $\mu(H) > 0$.

A teret felcellázzuk olyan cellákra, amelyeken μ véges; vegyük észre, hogy az állításunkat elég egy cellára igazolni. Tehát azt is feltehetjük, hogy $\mu(X)$ véges.

Minden n-re legyen $\varphi_n = \alpha - n \cdot \mu$; ez előjeles mérték, a Hahn-felbontása legyen $X = P_n \cup N_n$. A definíció miatt $\varphi_{n+1} \leqslant \varphi_n$, így $P_{n+1} \subset P_n$ és $N_{n+1} \supset N_n$. Legyen $S = \bigcup N_n$ és $V = \bigcap P_n$.

Mivel $0 \geqslant \varphi_n(N_n) = \alpha(N_n) - n \cdot \mu(N_n)$, ezért $-\infty < \alpha(N_n) \leqslant n \cdot \mu(N_n) < \infty$ vagyis $\alpha(N_n)$ véges. Ezért α valóban σ-véges S-en.

Ha $H \subset V = \bigcap P_n$ és $\mu(H) > 0$, akkor minden n-re $H \subset P_n$; akkor $\varphi_n(H) \geqslant 0$, $\alpha(H) \geqslant n \cdot \mu(H)$. Ez minden n-re igaz, tehát $\alpha(H) = \infty$.

Ezek után a Radon–Nikodym deriváltat előállíthatjuk a σ-véges S részen úgy mint eddig, a V halmazon pedig legyen $f = \infty$.

Egyértelműség: az S-en az egyértelműséget már tudjuk; azt kell igazolni, hogy a V halmazon csak a (μ-m.m.) konstans ∞ lehet a RND. Legyen tehát f RND a V halmazra megszorítva; ekkor tehát minden $H \subset V$ és $\mu(H) > 0$ esetén $\int_H f \mathrm{d}\mu = \infty$.

Legyen $V_n = V(f \leqslant n)$. Mivel $\alpha(V_n) = \int_{V_n} f \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(V_n) \cdot n < \infty$ véges, ez csak úgy lehet, ha $\mu(V_n) = 0$. De ekkor a $V(f < \infty) = \bigcup V_n$ halmaz μ-nullmértékű. Tehát a V halmazon $f = \infty$ μ-m.m.

22.1 Tétel

Legyenek $\alpha \ll \beta$ (pozitív) mértékek $(X, \mathcal{M})$-en, $g = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}$, és f integrálható X-en. Ekkor

$$\int_X f\,\mathrm{d}\alpha = \int_X fg\,\mathrm{d}\beta.$$

Bizonyítás. Ha f egyszerű függvény, akkor trivi, majd monoton konvergencia.

Megjegyzés

A Radon-Nikodym derivált formulájának megjegyzési módja ugyanaz, mint a helyettesítéses integrálásnál:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\alpha = \int_X f \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta} \cdot \mathrm{d}\beta.$$

Lemma

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mérték, f mérhető függvény, amelyre létezik $\int_X f\mathrm{d}\mu$. Ekkor a $\vartheta(H) = \int_H f\mathrm{d}\mu$ előjeles/komplex mérték totális variációja

$$\tau(H) = \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. Trivi, hogy bármely $H \subset X$-re

$$\big|\vartheta(H)\big| = \left|\int_H f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

A másik irányhoz vegyünk egy $n \geqslant 4$ egészt, és $k = 1, \ldots, n$ esetén legyen $A_k = \left\{x \in H : \frac{2\pi(k-1)}{n} \leqslant \arg f(x) < \frac{2\pi k}{n}\right\}$.

$$\tau(H) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \big|\vartheta(A_k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{A_k} f\mathrm{d}\mu\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|e^{-\frac{2\pi k i}{n}} \int_{A_k} f\mathrm{d}\mu\right| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{2\pi k i}{n}} \int_{A_k} f\mathrm{d}\mu\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \mathrm{Re}\left(e^{-\frac{2\pi k i}{n}} f\right)\mathrm{d}\mu \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f| \cos\frac{2\pi}{n}\mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |f|\mathrm{d}\mu = \cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f|\mathrm{d}\mu.$$

Így hát

$$\cos\frac{2\pi}{n} \int_H |f|\mathrm{d}\mu \leqslant \tau(H) \leqslant \int_H |f|\mathrm{d}\mu,$$

és $n \to \infty$-vel kész.

Tétel

Ha ϑ komplex mérték $(X, \mathcal{M})$-en, és a totális variációja τ, akkor van olyan f függvény, amelyre $|f| = 1$ és

$$\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\tau.$$

Bizonyítás. Legyen $g = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau}$, avagy $\vartheta(H) = \int_H g \mathrm{d}\tau$. Az előző lemma szerint $\tau(H) = \int_H |g| \mathrm{d}\tau$, vagyis $\int_H (|g| - 1) \mathrm{d}\tau = 0$ minden H-ra, ami azt jelenti, hogy $|g| = 1$ τ-mm. Ahol g nem egységnyi, ott tetszés szerint megváltoztathatjuk...

Definíció (előjeles/komplex mérték szerinti integrál)

Ha ϑ előjeles/komplex mérték és a totális variációja τ, akkor legyen

$$\int_H f \mathrm{d}\vartheta := \int_H f \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\tau.$$

Alternatív definícó: Ha ϑ előjeles mérték és a variációi π, ν, akkor

$$\int_H f \mathrm{d}\vartheta := \int_H f \mathrm{d}\pi - \int_H f \mathrm{d}\nu.$$

18

V. rész

Borel-mértékek differenciálása

Most $\mathbb{R}^p$-beli lokálisan véges előjeles Borel-mértékeket fogunk deriválni.

23. Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Szimmetrikus, közönséges és erős derivált.

Definíció (differenciálbázis)

Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$. A $\mathcal{D} \subset G \times \mathcal{B}$ halmaz *differenciálbázis*, ha minden $(a, A) \in \mathcal{D}$ esetén A korlátos, $\lambda(A) > 0$, és $a \in G$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $(a, A) \in \mathcal{D}$, amelyre $A \subset B(a, \varepsilon)$.
A $\mathcal{D}$ differenciálbázis *reguláris*, ha minden $a \in G \in \mathcal{D}$-hez van olyan $\varrho(a) > 0$ sűrűség, hogy minden (a, A)-ra van olyan r, hogy $A \backslash B(a, r)$ nullmértékű és $\lambda(A) \geqslant \varrho(a) \cdot \lambda(B(a, r))$, vagyis ha vesszük a legkisebb, az A-t majdnem tartalmazó gömböt, akkor az A a gömbnek legalább a $\varrho(a)$ részét kitölti.
A $\mathcal{D}$ differenciálbázis *egyenletesen reguláris*, ha a $\varrho(x)$ függvény konstans.

Definíció (differenciálbázis szerinti derivált)

Legyen ϑ előjeles Borel-mérték G-n, $\mathcal{D}$ differenciálbázis.

- A *ϑ $\mathcal{D}$ szerinti alsó deriváltja* az $a \in G$ pontban

$$\underline{D_{\mathcal{D}}}\vartheta(a) = \lim_{r\to 0+} \inf \left\{ \frac{\vartheta(A)}{\lambda(A)} : (a, A) \in \mathcal{D}, A \subset B(a, r) \right\},$$

  illetve

- a *ϑ $\mathcal{D}$ szerinti felső deriváltja* az $a \in G$ pontban

$$\overline{D_{\mathcal{D}}}\vartheta(a) = \lim_{r\to 0+} \sup \left\{ \frac{\vartheta(A)}{\lambda(A)} : (a, A) \in \mathcal{D}, A \subset B(a, r) \right\}.$$

- Azt mondjuk, hogy *a $\mathcal{D}$ bázis differenciálja ϑ-t az a pontban*, ha az alsó és a felső derivált egyenlő és véges. Ilyenkor $D_{\mathcal{D}}\vartheta(a)$-val is jelöljük. Ezzel ekvivalensen, a $\mathcal{D}$ bázis differenciálja ϑ-t az a pontban, és a derivált értéke $D_{\mathcal{D}}\vartheta(a) = b \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall (a, A) \in \mathcal{D}, A \subset B(a, r) \quad \left| \frac{\vartheta(A)}{\lambda(A)} - b \right| < \varepsilon.$$

- Egy ϑ komplex mérték akkor differenciálható, ha a valós és a képzetes része is differenciálható, és persze $D_{\mathcal{D}}\vartheta(a) = D_{\mathcal{D}}(\operatorname{Re}\vartheta(a)) + i \cdot D_{\mathcal{D}}(\operatorname{Im}\vartheta(a))$. A komplex mértékek definícióját az előző képlettel is definiálhatjuk.

Példák

1. Legyen ϑ egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mérték, aminek az eloszlásfüggvénye F.
A $\mathcal{D}_1 = \{(a, [a, a+r)) : a \in G, r > 0\}$ bázis szerinti derivált

$$D_{\mathcal{D}_1}\vartheta(a) = \lim_{r\to+0} \frac{\vartheta\big([a, a+r)\big)}{\lambda\big([a, a+r)\big)} = \lim_{r\to+0} \frac{F(a+r) - F(a)}{r} = F'(a+0);$$

a $\mathcal{D}_2 = \{(a, [a-r, a)) : a \in G, r > 0\}$ bázis szerinti derivált

$$D_{\mathcal{D}_2}\vartheta(a) = \lim_{r\to+0} \frac{\vartheta\big([a-r, a)\big)}{\lambda\big([a-r, a)\big)} = \lim_{r\to+0} \frac{F(a) - F(a-r)}{r} = F'(a-0);$$

a $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ bázis szerinti derivált $F'(a)$.
2. Szimmetrikus bázis: $\mathcal{D} = \{(a, B(a, r)) : r > 0\}$, a szimmetrikus bázis szerinti derivált a *szimmetrikus derivált*.
3. Kockabázis: $\mathcal{D} = \{(a, Q) : Q \ni a$ tengelypárhuzamos, zárt kocka$\}$, ebből lesz a *közönséges derivált*.
4. Téglabázis: $\mathcal{D} = \{(x, T) : T \ni x$ tengelypárhuzamos, zárt tégla$\}$, ebből lesz az *erős derivált*.
A szimetrikus és a kockabázis egyenletesen reguláris, a téglabázis nem reguláris.

Megjegyzés

Bár természetes lenne, de a differenciálbázis definíciójában nem kötjük ki, hogy az a pont benne legyen a halmazban; például a $\mathcal{D}_2 = \{a, [a-r, a) : a \in G, r > 0\}$ differenciálbázisban a halmazok nem tartalmazzák az a pontot.

Lemma

$$\overline{D}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \leqslant \overline{D}\vartheta_1 + \overline{D}\vartheta_2$$

$$\underline{D}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \geqslant \underline{D}\vartheta_1 + \underline{D}\vartheta_2$$

Ha ϑ_1 és ϑ_2 is differenciálható a $\mathcal{D}$ bázisban, akkor

$$D(\vartheta_1 + \vartheta_2) = D\vartheta_1 + D\vartheta_2.$$

Bizonyítás. A lim sup szub-, illetve a lim inf szuperadditivitásából következik

A továbbiakban $\mathcal{D}$ a szimmetrikus bázis, a legtöbb helyen nem is fogjuk kiírni. Sőt, egy darabig csak pozitív mértéket (ami majd a ϑ totális variációja lesz) fogjuk deriválni.

Először is azt fogjuk megmutatni, hogy Borel-mértékek deriváltjai Borel-mérhető függvények.

Lemma

Ha $\mu \geqslant 0$ Borel-mérték G-n, és $0 < t \leqslant \infty$ rögzített, akkor az

$$f^t(x) = \sup\left\{\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}$$

függvény a.f.f., az

$$g^t(x) = \inf\left\{\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}$$

függvény f.f.f., ezért mindkettő Borel-mérhető.

Bizonyítás. (a) Rögzítsünk egy $a \in G$ pontot és egy $c < f^t(a)$ számot tetszőlegesen.

Vegyünk egy olyan c_1-et, amelyre $c < c_1 < f^t(a)$. Ehhez létezik olyan $A = B(a,r)$ úgy, hogy $r < t$ és $\dfrac{\mu(A)}{\lambda(A)} > c_1$.

Ha $\delta \leqslant \frac{t-r}{2}$ és $x \in B(a,\delta)$, akkor $B(a,r) \subset B(x,r+\delta) \subset B(a,r+2\delta) \subset B(a,t)$,

$$f^t(x) \geqslant \frac{\mu(B(x,r+\delta))}{\lambda(B(x,r+\delta))} \geqslant \frac{\mu(B(a,r))}{\left(\frac{r+\delta}{r}\right)^p \lambda(B(a,r))} > \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^p c_1 > c,$$

az utolsó előtti egyenlőtlenség akkor igaz, ha δ elég kicsi.

Tehát bármely $c < f^t(a)$ esetén van olyan kicsi $\delta > 0$, hogy a $B(a,\delta)$ környezetben $f^t > c$. Vagyis az f^t függvény a.f.f.

(b) Ugyanígy, vegyünk egy $a \in G$ pontot és egy $c > g^t(a)$ számot tetszőlegesen, majd ezekhez egy c_1-et, amelyre $c > c_1 > g^t(a)$. Ehhez létezik olyan $A = B(a,r)$ úgy, hogy $r < t$ és $\dfrac{\mu(A)}{\lambda(A)} < c_1$.

Ha $\delta < r$ és $x \in B(a,\delta)$, akkor $B(x,r-\delta) \subset B(a,r) \subset B(a,t)$, és

$$g^t(x) \leqslant \frac{\mu(B(x,r-\delta))}{\lambda(B(x,r-\delta))} \leqslant \frac{\mu(B(a,r))}{\left(\frac{r-\delta}{r}\right)^p \lambda(B(a,r))} < \left(\frac{r}{r-\delta}\right)^p c_1 < c,$$

az utolsó egyenlőtlenség most is csak elég kicsi δ esetén igaz.

Tehát bármely $c > g^t(a)$ esetén van olyan kicsi $\delta > 0$, hogy a $B(a,\delta)$ környezetben $g^t < c$. Vagyis a g^t függvény f.f.f.

Lemma

Ha $\mu \geqslant 0$ Borel-mérték G-n, akkor $\overline{D}\mu$ és $\underline{D}\mu$ Borel-mérhető.

Bizonyítás. Az előző lemma jelöléseivel

$$\overline{D}\mu(x) = \lim_{t\to+0} f^t(x) = \lim_{n\to\infty} f^{1/n}(x) \qquad \text{és} \qquad \underline{D}\mu(x) = \lim_{t\to+0} g^t(x) = \lim_{n\to\infty} g^{1/n}(x),$$

ahol $f^t(x)$ illetve $g^t(x)$ az előző lemma szerint a.f.f. illetve f.f.f., tehát Borel-mérhetőek, és Borel-mérhetők pontonkénti limesze is Borel-mérhető.

24. A maximális operátor tétele

Maximális operátor. A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges.

Definíció (maximális operátor, maximális függvény)

Legyen ϑ előjeles vagy komplex Borel-mérték, a totális variációja τ, és legyen $0 < t \leqslant \infty$. Ekkor legyen

$$M^t\vartheta(x) = \sup\left\{\frac{\tau(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r < t\right\}.$$

Ha $t = \infty$, akkor a jelölésből elhagyhatjuk a t indexet: $M\vartheta$. Ha ϑ az f függvény integrálja, akkor írhatjuk azt is, hogy $M^t f$ vagy Mf. Vagyis $Mf(x) = \sup\left\{\frac{\int_{B(x,r)}|f|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} : 0 < r\right\}$
Az M^t neve *maximális operátor* (mert mértékhez vagy függvényhez rendel függvényt), az $M^t\vartheta$ a *maximális függvény*.

Triviális, hogy ha ϑ előjeles mérték, akkor $-M\vartheta \leqslant \underline{D}\vartheta \leqslant \overline{D}\vartheta \leqslant M\vartheta$ (lim inf és lim sup az inf és sup között van).

Lemma

Az $M^t\vartheta$ maximális függvény a.f.f., tehát Borel-mérhető.

Bizonyítás. A 23 lemma első fele a τ mértékre.

Lemma

Véges sok gömb közül kiválaszthatóak páronként diszjunktak úgy, hogy a háromszorosuk az összes gömböt fedje (A $B(a,r)$ gömb háromszorosa $3B(a,r) = B(a,3r)$).

Bizonyítás. Legyen a gömbök $B_1, \ldots, B_n$ sorrendje olyan, hogy $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_n > 0$

A gömbök közül kiválasztunk néhányat, amelyek páronként diszjunktak. Mohón, a gömbök mindegyikét sorban vagy kiválasztjuk, vagy nem. A B_1-et kiválasztjuk. A B_2-t akkor választjuk ki, ha nem metszi B_1-et. Ha a $B_1, \ldots, B_{k-1}$ gömbökről már eldöntöttük, hogy kiválasztjuk-e: a B_k gömböt akkor választjuk ki, ha nem metszi egyik korábban kiválasztott gömböt sem.

Legyenek a kiválasztott gömbök $B_{i_1}, \ldots, B_{i_N}$; ezek páronként diszjunktak. Azt állítjuk, hogy a 3-szorosra nagyított $B(x_{i_1}, 3r_{i_1}), \dots, (x_{i_N}, 3r_{i_N})$ gömbök lefedik $\bigcup_{i=1}^n B_i$-t. Vegyünk egy tetszőleges $x \in \bigcup_{i=1}^n B_i$ pontot; ezt valamelyik B_k gömb lefedi. Ha B_k kiválasztott gömb, akkor ennek 3-szoros nagyítása is fedi x-et. Ha B_k nem kiválasztott, akkor belemetsz egy nála korábban kiválasztott, tehát egy nála nem kisebb kiválasztott gömbbe: legyen ez B_j, és legyen y a B_k és B_j gömbök egy közös pontja. Ekkor $|x-x_j| \leqslant |x-x_k|+|x_k-y|+|y-x_j| < r_k+r_k+r_j \leqslant 3r_j$, így $x \in B(x_j, 3r_j)$.

Lemma (A maximális operátor tétele)

Ha ϑ véges előjeles vagy komplex mérték a $G \subset \mathbb{R}^p$ halmazon, és $t > 0$, akkor

$$\lambda(M\vartheta > t) \leqslant \frac{3^p \tau(G)}{t}.$$

Bizonyítás. Ha $K \subset G(M\vartheta > t)$ kompakt, akkor minden $x \in K$-hoz van olyan $r = r(x)$ sugár, amelyre $\frac{\tau(B(x,r))}{\lambda(B(x,r))} > t$. $\bigcup_{x \in K} B(x, r(x))$ lefedi K-t; a kompaktság miatt kiválasztható közülük egy véges fedés; ezt a sugarak szerint csökkenő sorrendbe tesszük. Tehát vannak olyan $x_1, \dots, x_n \in K$ pontok és $r_1 \geqslant \dots \geqslant r_n > 0$ sugarak, avagy $B_k = B(x_k, r_k)$ gömbök, amelyek fedik K-t.

Ezek után alkalmazzuk az előző lemmát a gömbökre, kapunk olyan diszjunkt $B_{i_1}, \dots, B_{i_N}$ gömböket, amelyekre $K \subset \bigcup_{k=1}^N 3B_{i_k}$. Tehát

$$\lambda(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \lambda(B(x_{i_k}, 3r_{i_k})) = 3^p \sum_{k=1}^N \lambda(B(x_{i_k}, r_{i_k})) < 3^p \sum_{k=1}^N \frac{\tau(B(x_{i_k}, r_{i_k}))}{t} \leqslant \frac{3^p \tau(G)}{t}.$$

Ez minden kompakt $K \subset G$-re igaz, tehát a Lebesgue-mérték regularitása miatt a $G(M\vartheta > t)$ halmazra is.

Következmény

Ha ϑ lokálisan véges, akkor $\underline{D}\vartheta$ és $\overline{D}\vartheta$ is λ-m.m. véges.

Bizonyítás. A G felbomlik megszámlálható sok olyan $G_1, G_2, \dots$ gömbre, amelyen τ véges. Legyen $\vartheta_n(H) = \vartheta(H \cap G_n)$; ez egy véges előjeles mérték; az G_n gömbön belül ϑ és ϑ_n alsó és felső deriváltja megegyezik.

Mivel $-M\vartheta_n \leqslant \underline{D}\vartheta_n \leqslant \overline{D}\vartheta_n \leqslant M\vartheta_n$, bármely $t > 0$ esetén

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_n| = \infty) \leqslant \lambda(M\vartheta_n = \infty) \leqslant \lambda(M\vartheta_n > t) \leqslant \frac{3^p \tau_n(G)}{t}.$$

Az $t \to \infty$ határátmenetből

$$\lambda(|\overline{D}\vartheta_n| = \infty) = 0.$$

A G_n belsejében tehát $\overline{D}\vartheta$ m.m. véges, tehát a gömbök unióján is.

25. Borel-mértékek differenciálása

Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0. Lebesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Sűrűségi tétel. [Petruska, 100–105. o.]

Lebesgue-pontok

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, $f : H \to \mathbb{R}$ vagy $f : H \to \mathbb{C}$ mérhető. Az $x_0 \in \operatorname{int} H$ pont az f függvénynek *Lebesgue-pontja*, ha

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)| \mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x_0, r))} = 0.$$

Trivi, hogy minden folytonossági pont Lebesgue-pont.

Definíció

Az f függvényt lokálisan integrálhatónak nevezzük H-n, ha minden pontnak van olyan környezete, amelyen az integrál véges, vagy ezzel ekvivalensen, minden $K \subset H$ kompakt halmazon az integrál véges.

Tétel

Ha f lokálisan integrálható H-n, akkor H m.m. belső pontja Lebesgue-pontja H-nak.

Bizonyítás. A H-t lefedhetjük olyan gömbökkel, amelyeken f integrálható, így elég integrálható f-re bizonyítani, vagyis $f \in L_1$ esetén.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Az integrálható függvények terében sűrűn vannak az olyan "szép" függvények, amelyek véges sok téglalapon konstansok, azokon kívül az értékük 0. Legyen g egy olyan szép függvény, amelyre $\int_G |f - g| \mathrm{d}\lambda < \frac{1}{k}$, és legyen $h = f - g$; ekkor tehát $\int_G |h| \mathrm{d}\lambda < \frac{1}{k}$.

Ha egy x pont nem esik egyik téglalap határára sem, akkor x egy kis környezetében g konstans, és így

$$\int_{B(x,r)} |f - f(x)| \mathrm{d}\lambda = \int_{B(x,r)} |h - h(x)| \mathrm{d}\lambda \leqslant \int_{B(x,r)} \big(|h| + |h(x)|\big) \mathrm{d}\lambda,$$

$$\frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + \frac{\int_{B(x,r)}|h|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + Mh(x),$$

$$\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} \leqslant |h(x)| + Mh(x).$$

Ha az x pontban $\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}$, akkor ott $|h(x)|$ és $Mh(x)$ valamelyike legalább $\frac{1}{2m}$. Ezért

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+} \frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}\right) \leqslant \lambda\left(|h| > \frac{1}{2m}\right) + \lambda\left(Mh > \frac{1}{2m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\int|h|\mathrm{d}\lambda}{1/2m} + \frac{3^p\int|h|\mathrm{d}\lambda}{1/2m} = 2m(1+3^p)\int_G |h|\mathrm{d}\lambda < \frac{2m(1+3^p)}{k}.$$

Ebből $k\to\infty$, majd $m\to\infty$ határátmenettel

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+}, \frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > \frac{1}{m}\right) = 0,$$

$$\lambda\left(\limsup_{r\to 0+}, \frac{\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(B(x,r))} > 0\right) = 0.$$

19

Derivált és Radon–Nikodym derivált

Lemma

Ha $\mu \geqslant 0$ lok. véges, szinguláris Borel-mérték, akkor $D\mu = 0$ m.m.

Bizonyítás. A 24. következményhez hasonlóan elég zárt gömbök belsejére bizonyítani, ezért az is feltehető, hogy μ véges.

Rögzítsünk két pozitív egészt, k-t és m-et.

Legyen H a β egy Lebesgue-nullmértékű tartója. A μ lok. véges Borel-mérték, tehát reguláris; van olyan $K\subset H$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(G\backslash K) < \frac{1}{k}$.

Legyen $\vartheta(A) = \mu(A\backslash K)$; ekkor persze ϑ totális variációja $\mu(A\backslash K)$. A K komplementuma nyílt, ezen ϑ és μ alsó és felső deriváltja ugyanaz, tehát $\overline{D}\vartheta = \overline{D}\mu$ és $\underline{D}\vartheta = \underline{D}\mu$ λ-m.m.

Ezek után

$$\lambda\left(\overline{D}\mu > \frac{1}{m}\right) = \lambda\left(\overline{D}\vartheta > \frac{1}{m}\right) \leqslant \lambda\left(M\vartheta > \frac{1}{m}\right) \leqslant \frac{3^p\mu(G\backslash K)}{1/m} < \frac{3^p m}{k}.$$

$k \to \infty$ majd $m \to \infty$,

$$\forall m \quad \lambda\left(\overline{D}\mu > \frac{1}{m}\right) = 0$$

$$\lambda\left(\overline{D}\mu > 0\right) = 0.$$

Következmény

Legyen $\mathcal{D}$ reguláris differenciálbázis, β lok. véges, szinguláris előjeles vagy komplex mérték. Ekkor $D_{\mathcal{D}}\beta = 0$ λ-m.m.

Bizonyítás. 1. eset: $\beta \geqslant 0$ mérték. Ha $(x_0, A) \in \mathcal{D}$, $A \subset B(x_0, r)$ és $\lambda(A) > \rho \cdot \lambda(B(x_0, r))$, akkor

$$\left|\frac{\beta(A)}{\lambda(A)}\right| < \frac{\beta(B(x_0, r))}{\varrho \cdot \lambda(B(x_0, r))} \to \frac{1}{\varrho} D\mu(x_0) = 0 \quad \text{m.m. } x_0\text{-ra.}$$

2. eset: β előjeles mérték, a Jordan-felbontása $\pi - \nu$. Az előző rész szerint $D\pi = D\nu = 0$ m.m.

3. eset: β komplex mérték. Ekkor $D(\operatorname{Re}\beta) = D(\operatorname{Im}\beta) = 0$ m.m.

25.1 Tétel (Mértékek differenciálásának fő tétele)

Legyen $\mathcal{D}$ reguláris differenciálbázis, ϑ lok. véges előjeles vagy komplex mérték, a Lebesgue-felbontása $\vartheta = \int f \mathrm{d}\lambda + \beta$. Ekkor $D_{\mathcal{D}}\vartheta = f$ λ-m.m.

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \int f \mathrm{d}\lambda$; megmutatjuk, hogy az f minden Lebesgue-pontjában $D\alpha = f$. Mivel $D\beta = 0$ m.m., ez elég is.

Legyen tehát x_0 Lebesgue-pont, és $0 < \rho = \rho(x_0) \leqslant 1$ a differenciálbázis regularitásában szereplő arány. Ha $A \subset B(x_0, r)$ és $\lambda(A) > \rho \cdot \lambda(B(x_0, r))$, akkor

$$\left|\frac{\alpha(A)}{\lambda(A)} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_A (f - f(x_0))\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)}\right| \leqslant \frac{\int_A |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\lambda(A)} \leqslant \frac{\int_{B(x_0,r)} |f - f(x_0)|\mathrm{d}\lambda}{\rho \cdot \lambda(B(x_0, r))} \to 0.$$

25.2 Tétel

Egy β lok. véges előjeles vagy komplex mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha $D\beta = 0$ λ-m.m.

26. A sűrűségi tétel

Definíció

$H \subset \mathbb{R}^p$-nek A mérhető burka, ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $A \supset H$ és $(*)$ minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $B \supset H$-ra $\lambda(A \backslash B) = 0$, avagy, minden $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $H \subset B \subset A$-ra $\lambda(A \backslash B) = 0$.

Lemma

1. Minden halmaznak létezik mérhető burka; még G_δ is.
2. Ha M_1 és M_2 is mérhető burok, akkor $\lambda(M_1 \triangle M_2) = 0$.
3. Ha M mérhető burok és A mérhető, akkor $M \cap A$ mérhető burka $H \cap A$-nak.

Bizonyítás. 1. Tekintsünk egy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazt; ehhez konstruálunk mérhető burkot.

Osszuk fel a teret korlátos kockákra: $\mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, és legyen a H halmaznak az n-edik kockába eső része $H_n = H \cap K_n$.

Vegyünk minden k-hoz és n-hez egy olyan $G_{n,k}$ nyílt halmazt, ami $1/k$-nál pontosabban fedi a H_n halmazt: $H_n \subset G_{n,k}$, $\lambda(G_{n,k}) < \overline{\lambda}(H \cap K_n) + \frac{1}{k}$. Ezek után legyen

$$M_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n,k}, \qquad M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Azt állítjuk, hogy M mérhető burka H-nak. Az trivi, hogy M is mérhető, $M_n \supset H_n$ és $M \supset H$.

A $(*)$ ellenőrzéséhez vegyünk egy tetszőleges $B \supset H$ mérhető halmazt. A K_n kockában $H_n \subset B \cap M_n \subset M_n$, ezért minden k-ra

$$\overline{\lambda}(H_n) \leqslant \lambda(B \cap M_n) \leqslant \lambda(M_n) \leqslant \lambda(G_{n,k}) < \overline{\lambda}(H_n) + \frac{1}{k};$$

A $k \to \infty$ határátmenetből

$$\lambda(B \cap M_n) = \lambda(M_n) = \overline{\lambda}(H_n),$$

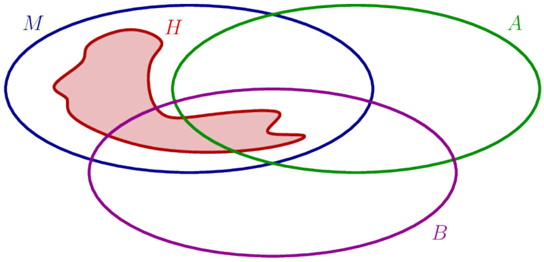
a kettő különbségéből $\lambda(M_n \backslash B) = 0$, végül

$$\lambda(M \backslash B) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n \backslash B) = 0.$$

Ez így még nem feltétlenül G_δ, de a regularitás miatt vehetjük a mérhető burok G_δ burkát.

2. Mivel M_1 és $M_2 \supset H$, a mérhető burok definíciójából $\lambda(M_2 \backslash M_1) = 0$. Az M_1, M_2 felcserélésével $\lambda(M_1 \backslash M_2) = 0$.

3. Az világos, hogy $M \cap A$ mérhető és tartalmazza $H \cap A$-t; ismét csak $(*)$-t kell ellenőrizni. Tegyük fel, hogy B mérhető és $B \supset H \cap A$. Mivel B fedi a $H \cap A$ halmazt, Az M pedig a teljes H halmazt, H-nak nem lehet eleme az $(M \cap A) \backslash B$ atomban:



Akkor viszont H-t fedi az $M \backslash \big((M \cap A) \backslash B\big)$, és így, mivel M mérhető burka H-nak,

$$\lambda\Big((M \cap A) \backslash B\Big) = 0.$$

Definíció

Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$, a mérhető burka M, és tekintsük a $\mu(A) = \overline{\lambda}(A \cap H) = \lambda(A \cap M)$ mértéket. A H halmaz alsó és felső sűrűsége az $x \in \mathbb{R}^p$ pontban

$$\overline{d}(x, H) = \overline{D}\mu(x) = \limsup_{r \to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

illetve

$$\underline{d}(x, H) = \underline{D}\mu(x) = \liminf_{r \to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))},$$

sűrűsége

$$d(x, H) = D\mu(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{\overline{\lambda}(B(x,r) \cap H)}{\lambda(B(x,r))}.$$

Az x a H-nak sűrűségi pontja, ha $d(x, H) = 1$.

Tétel (Lebesgue-féle sűrűségi tétel)

(a) m.m. $x \in H$ sűrűségi pont.
(b) H akkor és csak akkor Lebesgue-mérhető, ha m.m. $x \notin H$-ra $d(x, H) = 0$.

Bizonyítás. (a) Legyen M mérhető burka H-nak és $f = \chi_M$. Ekkor $\mu(A) = \lambda(A \cap M) = \int_A f \mathrm{d}\lambda$. Ezért $D\mu = \chi_M$ m.m.; speciálisan m.m.$x \in H \subset M$-re $D\mu(x) = 1$.

(b) Legyen N az $\mathbb{R}^p \backslash H$ mérhető burka, $\nu(A) = \lambda(A \cap N)$ és $g = \chi_N$.

Ha H mérhető, akkor lehet $M = H$ és $N = \mathbb{R}^p \backslash H$, és a két sűrűség is komplementere egymásnak.

Ha H nem mérhető, akkor $\lambda(M \cap N) > 0$. Ugyanis $\mathbb{R}^p \backslash N \subset H \subset M$, vagyis H két mérhető halmaz közé esik, ezek különbsége nem lehet nullmértékű. A különbség viszont éppen $M \cap N$. A metszet pontjaiban H sűrűsége 1 m.m.

27. Abszolút folytonos függvények

Abszolút folytonos függvény. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és a folytonosság kapcsolata. Monoton növő függvény abszolút folytonosságának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel és Radon–Nikodym deriválttal.

Most azzal fogunk játszani, hogy a Borel-mértékek differenciálásáról szóló tételeinket átírjuk az eloszlásfüggvényeikre.

Definíció (abszolút folytonos függvény)

- Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *abszolút folytonos*nak mondunk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely n és $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < y_n \leqslant b$, $\sum(y_i - x_i) < \delta$ esetén $\sum |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$.
- Egy I nyílt intervallumon értelmezett függvényt *abszolút folytonos*nak mondunk, ha minden $[a, b] \subset I$ intervallumon abszolút folytonos.

Trivialitás🙊

F Lipschitz $\Rightarrow$ F abszolút folytonos $\Rightarrow$ F folytonos.

27.1 Lemma

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, φ_F a megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték. Ezek ekvivalensek:
(1) F abszolút folytonos.
(2) A φ_F mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.
(3) Van olyan $f \geqslant 0$ mérhető függvény, aminek F integrálfüggvénye, és $f = F'$ m.m.

20

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (2): Tekintsünk egy tetszőleges $N \subset I$ nullmértékű halmazt; azt kell igazolnunk, hogy $\varphi_F(N) = 0$. A φ_F reguláris, ezért elég ezt az N kompakt részeire igazolni. Legyen tehát $K \subset I$ kompakt, $\lambda(K) = 0$. A K benne van egy $[a, b] \subset I$ intervallum belsejében: $K \subset (a, b) \subset [a, b] \subset I$.

Tetszőleges ε-hoz vegyünk egy, az (1) tulajdonságnak megfelelő δ-t. Fedjük le K-t nyílt intervallumokkal, amelyek Lebesgue-összmértéke δ-nál kisebb. Ebből válasszunk ki egy véges fedést. A fedésben lehetnek többszörösen fedett részek, de a fedés uniója mindenképpen véges sok diszjunkt relatív nyílt intervallumból áll; legyenek ezek $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$. A fedés Lebesgue-mértéke

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta,$$

a (3) tulajdonság alapján

$$\varphi_F(K)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi_F\big((x_i,y_i)\big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi_F\big(F(y_i)-F(x_i)\big)<\varepsilon.$$

Az $\varepsilon\to 0$ határátmenetből $\varphi_F(K)=0$.

(2) $\implies$ (3): Először is $\varphi_F\ll\lambda$, ezért minden pont mértéke 0, és ezért F folytonos.

Legyen $f=\frac{\mathrm{d}\varphi_F}{\mathrm{d}\lambda}$, ekkor tehát a F a f-nek integrálfüggvénye.

A $\mathcal{D}=\big\{[x,x+r),[x-r,x):x\in I,r>0\big\}$ reguláris differenciálbázisban a 25 tétel szerint $F'=D_{\mathcal{D}}\varphi_F=f$ m.m.

(3) $\implies$ (1): Legyen $[a,b]\subset I$ és $\varepsilon>0$ adott, ezekhez szeretnénk megfelelő $\delta>0$ számot találni.

Az f függvény integrálható $[a,b]$-n, ezért van olyan szép $g:[a,b]\to[0,\infty)$ függvény, amely tehát véges sok szakaszon konstans, és $\int_{[a,b]}|f-g|\mathrm{d}\lambda<\frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $K=\max g+1$. Azt állítjuk, hogy $\delta=\frac{\varepsilon}{2K}$ jó lesz.

Tekintsünk egy tetszőleges $a\leqslant x_1<y_1\leqslant x_2<y_2\leqslant\ldots\leqslant x_n<y_n\leqslant b$ intervallumsorozatot, amelyre $\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$. Erre a sorozatra

$$\sum_{i=1}^{n}\big(F(y_i)-F(x_i)\big)=\sum_{i=1}^{n}\int_{[x_i,y_i)}f\mathrm{d}\lambda\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{[x_i,y_i)}\big(g+|f-g|\big)\mathrm{d}\lambda\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{[x_i,y_i)}K\mathrm{d}\lambda+\int_{[a,b]}|f-g|\mathrm{d}\lambda\leqslant\sum_{i=1}^{n}K(y_i-x_i)+\frac{\varepsilon}{2}<K\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Megjegyzés

Nyílt intervallumon a terminológia nem egyértelmű. Sokan ott is ugyanezt az epszilon-deltás tulajdonságot követelik meg, és *lokálisan abszolút folytonos*-nak hívják azt, amit mi abszolút folytonosnak hívunk.

A `https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_continuity` Wikipédia oldalon például az a definíció, hogy bármlyen I intervallumon $f:I\to\mathbb{R}$ akkor abszolút folytonos, ha minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $\delta>0$, hogy bármely $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)\subset I$, páronként diszjunkt intervallumok és $\sum(y_i-x_i)<\delta$ esetén $\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$. Majd (hamisan) azt állítják, hogy ezzel ekvivalens, hogy f' m.m. létezik, és f az f' integrálfüggvénye. Érdemes kipróbálni mondjuk az $f(x)=x^2$ függvényre.

28. Szinguláris függvények

Szinguláris függvény. Monoton növő függvény szingularitásának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel. Lebesgue-felbontás. Minden monoton függvény m.m. differenciálható. Fubini-tétel monoton függvények összegének tagonkénti differenciálásáról. Newton–Leibniz formula.

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Egy $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt *szinguláris*nak nevezünk, ha $F' = 0$ m.m.

28.1 Lemma

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ monoton növő, φ_F a megváltozásából származó Lebesgue-Stieltjes mérték. Ezek ekvivalensek:
(1) F szinguláris.
(2) A φ_F mérték abszolút szinguláris a Lebesgue-mértékre nézve.

Bizonyítás. A 25 tételt akarjuk alkalmazni. Legyen $\mathcal{D} = \big\{[x, x+r), [x-r, x) : x \in I, r > 0\big\}$ és $D\varphi_F$; Vegyük észre, hogy

$$\frac{\varphi_F([x-r, x+r))}{2r} \leqslant \max\left(\frac{\varphi_F([x-r, x))}{r}, \frac{\varphi_F([x, x+r))}{r}\right) \leqslant 2\frac{\varphi_F([x-r, x+r))}{2r}.$$

Az $r \to +0$ határátmenetből

$$0 \leqslant \overline{D}\varphi_F(x) \leqslant \underline{F'(x)} \leqslant \overline{F'(x)} \leqslant 2\overline{D}\varphi_F(x).$$

Ezért F szinguláris $\Leftrightarrow$ $F' = 0$ m.m. $\Leftrightarrow$ $\overline{D}\varphi_F = 0$ m.m. $\Leftrightarrow$ φ_F szinguláris.

Megjegyzés

Itt sem egyértelmű a terminológia. Van, aki csak folytonos függvényekre definiálja a szingularitást, itten kezdve baj lesz a Lebesgue-felbontással. Van aki a konstans nulla függvényt nem hívja szingulárisnak, szerinte a szinguláris függvények nem alkotnak vektorteret.

Példa

A $c(x)$ Cantor-függvény folytonos, és szinguláris, nem abszolút folytonos. (A függvényt definiáljuk úgy, hogy a $(-\infty, 0]$ intervallumon 0, az $[1, \infty)$ intervallumon konstans 1 legyen.) A $c(x)$ a szinguláris Cantor-mérték eloszlásfüggvénye.
Végtelen sok szinguláris, folytonos mérték összegéből nyerhetünk szigorúan monoton, folytonos, szinguláris függvényt: ha $q_1, q_2, \ldots$ a racionális számok egy felsorolása, akkor az

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} c\big(x - q_k\big)$$

szingorúan monoton növő, az egyenletes konvergencia miatt folytonos, és szinguláris is, mert φ_F megszámlálható sok szinguláris mérték összege. Szóval f folytonos, monoton nő, és majdnem mindenhol 0 a deriváltja...

Lebesgue-felbontás

Tétel (Lebesgue-felbontás)

Minden monoton növő függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F : I \to \mathbb{R}$ monoton nő, x_0 egy folytonossági pontja, és legyen φ_F Lebesgue-felbontása $\varphi_F = \alpha + \beta$.

Vegyük α-nak és β-nak egy-egy $a(x)$, illetve $b(x)$ eloszlásfüggvényét úgy, hogy $a(x_0) + b(x_0) = f(x_0)$. Ekkor bármely $x > x_0$ folytonossági pontban

$$F(x) = F(x_0) + \varphi_F([x_0, x)) = a(x_0) + b(x_0) + \alpha([x_0, x)) + \beta([x_0, x)) = a(x) + b(x).$$

Az f szakadási pontajban b értékét megváltoztathatjuk úgy, hogy $f = a + b$ mindenhol teljesüljön.

Tétel

Ha F monoton, akkor m.m. differenciálható.

Bizonyítás. Az F abszolút folytonos és a szinguláris része is m.m. differenciálható.

Tétel (Fubini)

Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F_n : I \to \mathbb{R}$ monoton növő és $\sum F_n$ minden pontban konvergens, akkor

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} F_n' \quad \text{m.m.}$$

Bizonyítás. Legyen az F_n megváltozásából származó LS mérték és ennek Lebesgue-felbontása $\varphi_n = \alpha_n + \beta_n$, az α_n RN deriváltja $f_n \geqslant 0$, és legyen $\varphi = \sum \varphi_n$, $\alpha = \sum \alpha_n$ (ami absz. folyt.) és $\beta = \sum \beta_n$ (ami szinguláris).

Az $S = \sum F_n$ függvény a $\varphi = \alpha + \beta$ mértéknek eloszlásfüggvénye, mert $S(b) - S(a) = \sum \big(F_n(b) - F_n(a)\big) = \sum \varphi_n\big([a,b)\big)$.

$$\alpha = \sum \alpha_n = \sum \int f_n \mathrm{d}\lambda \overset{\text{BL}}{=} \int \Big(\sum f_n\Big) \mathrm{d}\lambda,$$

vagyis φ abszolút folytonos részének Radon–Nikodym deriváltja $\sum f_n$. A 25. tétel szerint

$$S' = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = \sum f_n = \sum F_n' \quad \lambda\text{-m.m.}$$

Newton–Leibniz formula

Lemma

Ha F monoton nő, szinguláris és nem konstans, akkor van olyan pont, ahol $\overline{F'} = \infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F(a) < F(b)$ és legyen φ_F az F megváltozásából kapott Lebesgue-Stieltjes mérték. Mivel φ_F szinguláris, ezért van olyan nullmértékű $H \subset [a,b]$ halmaz, amelyre $\varphi_F(H) = \varphi_F([a,b]) = F(b) - F(a) > 0$. Fedjük le H-t nagyon kis összhosszússágú intervallumokkal. Ekkor valamelyikben nagy lesz F meredeksége a két végpont között. Erre az intervallumra ugyanezt eljátszva, majd ezt ismételgetve, az intervallumok metszetében kapunk egy pontot, amelyben végtelen a felső derivált.

Tétel (Newton–Leibniz formula)

Ha F monoton nő, mindenhol differenciálható, akkor abszolút folytonos, és $F(b) - F(a) = \int_{[a,b]} F' \mathrm{d}\lambda$.

Korlátos változású függvények

A korlátos változású függvényekre ezek könnyen kiterjeszthetőek. A továbbiakban F *lokálisan* korlátos változású lesz.

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Az f függvény *lokálisan korlátos változású*, ha I minden kompakt részintervallumán korlátos változású.

Lemma

Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor lokálisan korlátos változású, ha két mononton növő függvény különbsége.

Bizonyítás. Válasszunk egy $x_0 \in I$ kezdőpontot, és legyen

$$g(x) = \begin{cases} V(f, [x_0, x]) & x \geqslant x_0 \\ -V(f, [x, x_0]) & x < x_0 \end{cases}, \quad h(x) = g(x) - f(x).$$

Következmény

Legyen $F : I \to \mathbb{R}$ (vagy $F : I \to \mathbb{C}$), ekkor
F Lipschitz $\Rightarrow$ F abszolút folytonos $\Rightarrow$ F folytonos és lok. k.v.

Lemma

Ha $F : I \to \mathbb{R}$ (vagy $F : I \to \mathbb{C}$) korlátos változású, akkor az F folytonossági intervallumain értelmezett $\varphi([a, b)) = F(b) - F(a)$ intervallumfüggvény kiterjeszthető előjeles (komplex) Borel-mértékké.

Bizonyítás. Az F felbomlik két montoton növekvő függvény különbségére. Ezekből egy-egy véges LS mértéket készíthetünk, ezek különbsége egy előjeles mérték, ami az F megváltozásának kiterjesztése.

Következmény

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $F : I \to \mathbb{R}$ lok. k.v, φ_F a megváltozásából származó előjeles/komplex Lebesgue-Stieltjes mérték. Ezek ekvivalensek:
(1) F abszolút folytonos.
(2) A φ_F mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve.
(3) Van olyan f mérhető függvény, aminek F integrálfüggvénye, és $f = F'$ m.m.

Következmény

Az $F : I \to \mathbb{C}$ lok.kv. függvény akkor és csak akkor szinguláris, ha az F megváltozásából származó előjeles/komplex Lebesgue–Stieltjes mérték szinguláris.

Következmény

Minden lok. k.v. függvény felbomlik egy abszolút folytonos és egy szinguláris függvény összegére.

Következmény

Ha F lokásan korlátos változású, akkor m.m. differenciálható.

21

VI. rész

Szorzatmértékek

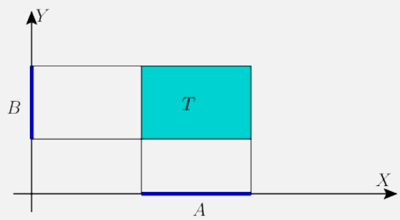
29. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata. [Petruska, 121, 123–124. o.]

Két mértéktér szorzata

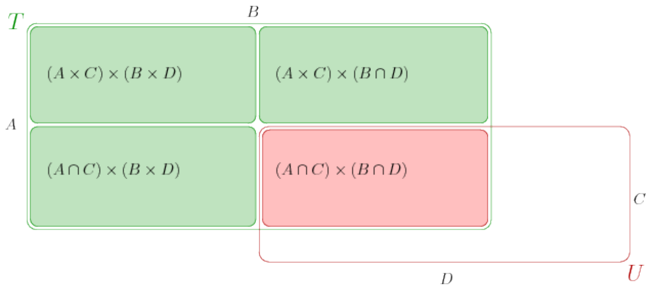
29.1 Lemma

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ két mértéktér.



(a) A $\mathcal{T} = \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}\}$, a "téglák" halmaza félgyűrű;
(b) A $\mathcal{T}$ félgyűrűn az $\alpha(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ halmazfüggvény σ-additív, σ-szubadditív, és additív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\varnothing \in \mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége előáll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója; mindhárom triviális. Az ábrán a $T \cap U$ és $T \backslash U$ felbontása látható.



Az üres halmaz is tégla, például $\emptyset \times \emptyset \in \mathcal{T}$.

(b) Tegyük fel, hogy a $T = A \times B$ tégla felbomlik a $T_n = A_n \times B_n$ téglák $(n = 1, 2, \dots)$ diszjunkt uniójára. Ekkor $x \in X$, $y \in Y$ esetén

$$\chi_A(x)\ \chi_B(y) = \chi_T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{T_n}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\ \chi_{B_n}(y).$$

Előbb x, majd y szerint integrálva,

$$\mu(A)\ \chi_B(y) = \left(\int_X \chi_A(x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right) \chi_B(y) = \int_X \chi_A(x)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\chi_{B_n}(y)$$

$$\alpha(T) = \mu(A)\ \nu(B) = \int_Y \mu(A)\ \chi_B(y)\ \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\ \chi_{B_n}(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$\overset{\text{Beppo Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \mu(A_n)\chi_{B_n}(y)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(T_n)$$

tehát α tényleg σ-additív (és persze additív is).

A σ-szubadditivitás következik abból, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű: a szokott módon minden fedés kicserélhető diszjunkt téglákkal való fedésre, és elmetszhető a lefedett téglával.

A 29. Lemma biztosítja mértékkiterjesztés feltételeit: az α téglafüggvény kiterjeszthető mértékké a téglák által generált σ-algebrára.

Definíció

Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = X \times Y$, φ_α a lemmabeli α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ az φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

Véges sok mértéktér szorzata

A lemma és a definíció minden nehézség nélkül kiterjeszthető n mértéktér szorzatára is.

Definíció

(véges sok mértéktér szorzata)
Ha $(X_k, \mathcal{M}_k, \mu_k)$ $(k = 1, 2 \ldots, n)$ mértékterek, akkor $\mathcal{T} = \{A_1 \times \ldots \times A_n : A_1 \in \mathcal{M}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_n\}$ a téglák félgyűrűje, ezen az $\alpha(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(A_n)$ függvény σ-additív. A mértékterek szorzata $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$, ahol $Z = X_1 \times \ldots \times X_n$ halmazon, $\varphi_\alpha : Z \to [0, \infty]$ az α-hoz asszociált külső mérték, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ a φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

A σ-additivitásának bizonyítása ugyanúgy megy, mint a 29 lemmában, csak a Beppo Levi tételt nem kétszer, hanem k-szor kell alkalmazni.

Példa

Ha μ a p-dimenziós, ν a q-dimenziós Lebesgue-mérték, akkor a szorzat a $(p+q)$-dimenziós Lebesgue-mérték. Ez majdnem triviális, a valamelyik mérték szerint nullmértékű halmazokat kell egy kicsit diszkutálni: minden mérhető halmaz egy F_σ halmaz és egy nullmértékű halmaz uniója stb.

A szorzatmérték szerinti integrál átírása többszörös integrállá

Tétel (Fubini)

Legyen a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértékterek szorzata, és f φ-m.mérhető Z-n. Ha f (végesen) integrálható, vagy ha Z σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor
(a) μ-m.m. x-re létezik a $g(x) = \int_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y)$ paraméteres integrál;
(b) $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$, avagy

$$\int_Z f(x, y) \mathrm{d}\varphi(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\ \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Megjegyzés. *Az $f \geqslant 0$ esetet szokás Tonelli-tételnek is nevezni.*

Bizonyítás. A komplex értékű függvények esetében külön vehetjük a valós és a képzetes részt, ezért elég csak a valós értékű függvényekre bizonyítani.

Az f függvényt nevezzük Fubini-félének, ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, és f-re teljesül a tétel, vagyis az (a) és a (b) tulajdonság. Jelölje Φ a Fubini-féle függvények családját. Szép sorban egyre többféle függvényről bizonyítjuk be, hogy Fubini-féle.

(I) Bármely $T = A \times B \in \mathcal{T}$ tégla esetén $\chi_T \in \Phi$.

A φ definíciója alapján trivi:

$$\int_X \left(\int_Y \chi_T(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(\int_Y \chi_A(x)\chi_B(y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \int_X \left(\chi_A(x) \int_Y \chi_B(y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \chi_A(x)\nu(B) \,\mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \nu(B) \int_X \chi_A(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \nu(B)\mu(A) = \varphi(T) = \int_Z \chi_T \,\mathrm{d}\varphi.$$

(II) Ha $f \in \Phi$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f \in \Phi$.

$$\int_X \left(\int_Y c\, f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \left(c \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= c \int_X \left(\int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = c \int_Z f(x, y) \,\mathrm{d}\varphi = \int_Z \big(c\, f(x, y) \big) \mathrm{d}\varphi.$$

(III) Ha $f_1, f_2 \in \Phi$ és $\int_Z f_1 \,\mathrm{d}\varphi + \int_Z f_2 \,\mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor $f_1 + f_2 \in \Phi$.

A két integrál összeadható, és (II) miatt f megszorozható (-1)-gyel, ezért feltehetjük, hogy egyik sem $-\infty$. Legyen $g_i(x) = \int_Y f_i(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y)$ $(i = 1, 2)$. Mivel

$$\int_X g_i(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_i \,\mathrm{d}\varphi > -\infty,$$

az is igaz, hogy μ-m.m. x-re $g_i(x)$ létezik, és az értéke nem $-\infty$. Akkor viszont $g_1(x)$ és $g_2(x)$ μ-m.m. x-re összeadható. Minden egyes ilyen x értékre

$$\int_Y f_i(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) = g_i(x) > -\infty,$$

ezért ν-m.m. y-ra $f_i(x, y) > -\infty$, vagyis értelmes az $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ összeg, így

$$g_1(x) + g_2(x) = \int_Y f_1(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) + \int_Y f_2(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \big(f_1(x, y) + f_2(x, y)\big) \mathrm{d}\nu(y) = g(x),$$

és most már jogos a μ-m.m. x-re létező $g(x)$-ről beszélni.

Mivel

$$\int_X g_1(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_1 \,\mathrm{d}\varphi \quad \text{és} \quad \int_X g_2(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_2 \,\mathrm{d}\varphi$$

összeadható,

$$\int_X g(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X g_1(x) \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_X g_2(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_1 \,\mathrm{d}\varphi + \int_Z f_2 \,\mathrm{d}\varphi = \int_Z f \,\mathrm{d}\varphi.$$

(IV) Ha $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ nemnegatív Fubini-féle függvények egy növekvő sorozata, akkor ezek limesze, $f = \lim f_n$ is Fubini-féle.

Legyen $g_n(x) = \int_Y f_n(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y)$; ez (a) miatt μ-m.m. x-re létezik, ezért μ-m.m. x-re az összes $g_n(x)$ létezik, és $0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots$. Legyen most $g = \lim g_n$; a MKT miatt

$$g(x) = \lim g_n(x) = \lim \int_Y f_n(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) \overset{\text{mkt}}{=} \int_Y f(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) \qquad (\mu\text{-m.m. } x\text{-re}),$$

$$\int_Z f\, \mathrm{d}\varphi \overset{\text{mkt}}{=} \lim \int_Z f_n\, \mathrm{d}\varphi \overset{f_n \in \Phi}{=} \lim \int_X g_n(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{mkt}}{=} \int_X g(x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

(V) Ha $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2$, $f_2 \in \Phi$ és $\int_Z f_2\, \mathrm{d}\varphi = 0$, akkor $f_1 \in \Phi$.

Világos, hogy

$$0 \leqslant \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi \leqslant \int_Z f_2 \mathrm{d}\varphi = 0, \quad \text{így} \quad \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Abból, hogy

$$\int_X \left(\int_Y f_2(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Z f_2 \mathrm{d}\varphi = 0,$$

látjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad & \int_Y f_2(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) = 0; \\
\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad & \Big(\nu\text{-m.m } y\text{-ra} \quad f_2(x,y) = 0 \Big); \\
\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad & \Big(\nu\text{-m.m } y\text{-ra} \quad f_1(x,y) = 0 \Big); \\
\mu\text{-m.m } x\text{-re} \quad & \int_Y f_1(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) = 0; \\
\int_X \left(\int_Y f_1(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y) \right) & \mathrm{d}\mu(x) = 0 = \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

(VI) Ha $A = \bigcup T_k$ megszámlálható sok tégla uniója, akkor $\chi_A \in \Phi$.

Mivel a téglák félgyűrűt alkotnak, a szokásos módon kicserélhetjük az unióban szereplő téglákat diszjunkt téglákra. Mostantól a tégláink diszjunktak, ezért $\chi_A = \sum \chi_{T_k}$.

Legyen $f_n = \chi_{T_1 \cup \ldots \cup T_n} = \chi_{T_1} + \ldots + \chi_{T_n}$; Ekkor $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$, és $\lim f_n = \chi_A$. Ezután (III) miatt $f_n \in \Phi$, majd (IV) miatt $\chi_A = \lim f_n \in \Phi$.

(VII) Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$, mindegyikük megszámlálható sok tégla egyesítése, $\varphi(A_1)$ véges, és $A = \bigcap A_n$. Ekkor $\chi_A \in \Phi$.

Először is, vegyük észre, hogy ha $B = \bigcup_k B_k$ és $C = \bigcup_\ell C_\ell$ is megszámlálható sok tégla uniója, akkor $B \cap C = \bigcup_{k,\ell} (B_k \cap C_\ell)$ is megszámlálható sok tégla uniója. Ezért A_2-t kicserélhetjük az $A_1 \cap A_2$ halmazra, utána A_3-at kicserélhetjük $A_2 \cap A_3$-ra...; ezek után feltehetjük, hogy $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Ekkor $\chi_A = \lim \chi_{A_n}$.

Legyen $f_n = \chi_{A_1} - \chi_{A_n}$. (VI) miatt $\chi_{A_n} \in \Phi$, (II+III) miatt $f_n \in \Phi$. Mivel $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, (IV) miatt $\chi_{A_1 \setminus A} = \lim f_n \in \Phi$. Mivel $\int_Z \chi_{A_1} \mathrm{d}\varphi = \varphi(A_1)$ véges, (II+III) miatt $\chi_A = \chi_{A_1} - \chi_{A_1 \setminus A} \in \Phi$.

(VIII) Ha $\varphi(A) = 0$, akkor $\chi_A \in \Phi$ és μ-m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$ (itt $A_x = \{y : (x,y) \in A\}$ az A halmaz x szerinti szekciója, ν^* pedig ν teljessé tétele).

Minden n-re fedjük le A-t egy olyan B_n halmazzal, amely megszámlálható sok tégla uniója és $\varphi(B_n) < \frac{1}{n}$, és legyen $C = \cap B_n$. Ekkor persze $\varphi(C) = 0$ mert minden n-re $\varphi(C) \leqslant \varphi(B_n) < \frac{1}{n}$.

(VII) szerint $\chi_C = \chi_{\cap B_n} \in \Phi$, végül $0 \leqslant \chi_A \leqslant \chi_C$ és (V) miatt $\chi_A \in \Phi$.

Már csak azt kell belátni, hogy $\varphi(A) = 0, \chi_A \in \Phi \Rightarrow \mu$-m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$. Itt Φ definíciója miatt $\int_Z \chi_A \,\mathrm{d}\varphi = \int_X (\int_Y \chi_A \,\mathrm{d}\nu) \,\mathrm{d}\mu$, továbbá $\varphi(A) = 0$ miatt $\int_Z \chi_A \,\mathrm{d}\varphi = 0$. A kettőt összevetve $\int_X (\int_Y \chi_A \,\mathrm{d}\nu) \,\mathrm{d}\mu = 0$, ahonnan következik, hogy μ-m.m. x-re $\int_Y \chi_{A_x} \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \chi_A(x,y) \,\mathrm{d}\nu(y) = 0$. Itt A_x lehet, hogy nem mérhető ν szerint, de ν^* szerint már biztosan az; tehát $\nu^*(A_x) = 0$.

(IX) Ha $A \in \mathcal{S}$ és $\varphi(A)$ véges, akkor $\chi_A \in \Phi$.

Válasszunk minden n-re olyan B_n halmazt, amely megszámlálható sok tégla uniója, fedi A-t és $\varphi(B_n) < \varphi(A) + \frac{1}{n}$. Legyen $C = \cap B_n$. Ekkor az $N = C \setminus A$ halmazra $\varphi(N) = 0$; (VII) miatt $\chi_C \in \Phi$, (VIII) miatt $\chi_N \in \Phi$, végül (II+III) miatt $\chi_A = \chi_C - \chi_N \in \Phi$.

(X) Ha $A \in \mathcal{S}$ és A σ-véges φ szerint, akkor $\chi_A \in \Phi$. Valóban, mivel $A = \sqcup A_j$, $\varphi(A_j) \leqslant \infty$, ezért (III+IV+IX) miatt $\chi_A = \sum \chi_{A_j} \in \Phi$.

(XI) Legyen $f \geqslant 0$ mérhető. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges, akkor $f \in \Phi$. Valóban, ha egy $g = \sum c_k \chi_{A_k} \geqslant 0$ egyszerű függvény integrálja véges, vagy ha φ σ-véges, akkor (II+III+X) miatt $g \in \Phi$. (IV) alapján ugyanez mondható f-re is, mert monoton limesze egyszerű függvényeknek.

(Itt $\chi_k = \chi_{A_k}, \bigcup^* A_k = Z$)

(XII) Legyen f majdnem mérhető és $f \geqslant 0$ m.m. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges, akkor $f \in \Phi$. Legyen $f_1 \geqslant 0$, és $f_1 = f$ φ-m.mindenhol. Legyen $A := \{z \in Z : f \neq g_1\}$, ekkor $\varphi(A) = 0$ és (VIII) szerint m.m. x-re $\nu^*(A_x) = 0$. Rögzítve egy x-et $f(x,y) = f_1(x,y)$ m.m. y-ra, vagyis $g(x) = \int_Y f(x,y) \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y f_1(x,y) \mathrm{d}\nu(y) := g_1(x)$ is m.m. x-re létezik, és az egyenlőség fennáll. Ekkor pedig (XI) szerint $\int_X g \mathrm{d}\mu = \int_X g_1 \mathrm{d}\mu = \int_Z f_1 \mathrm{d}\varphi = \int_Z f \mathrm{d}\varphi$.

(XIII) Legyen f majdnem mérhető. Ha $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ véges, vagy ha φ σ-véges és $\int_Z f \mathrm{d}\varphi$ létezik, akkor $f \in \Phi$. Az eddigiek szerint ha az első feltétel teljesül készen vagyunk ($f^+, f^- \geqslant 0$). A második esetben f, f^+, f^- majdnem mérhetők, és nemnegatívak, (II+XII) szerint $f^+, -f^- \in \Phi$, az integrál definíciója, és (III) miatt $f \in \Phi$ is teljesül.

A Fubini-tétel lehetőséget ad az integrálok felcserélgetésére, feltéve, hogy a szorzatmérték szerinti integrál létezik.

Példa

A Jordan-mérték szerinti integráloknál szokott szerepelni ez a példa: A $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{ha } x, y > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0. \end{cases}$$

Erre a függvényre

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{de} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}.$$

A két integrál azért lehet különböző, mert f_+ és f_- integrálja is végtelen, így a Fubini-tétel feltételei nem teljesülnek.

Megjegyzés. *Az ilyen példák után szokott eljönni az a kérdés, hogy tudunk-e olyan korlátos vagy nemnegatív* $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,\infty)$ *függvényt mondani, amelyre* $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ *és* $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ *is létezik, de az értékük különböző. A Fubini-tétel miatt korlátos vagy nemnegatív, Lebesgue-, speciálisan Borel-mérhető függvényekre a két integrál mindig egyenlő, mi pedig csak Borel-mérhető függvényeket tudunk felírni. Nem mérhető függvények konstruálásához muszáj a kiválasztási axiómát használni.*

Példa

Tegyük fel, hogy igaz a kontinuumhipotézis, és legyen $\prec$ a $[0,1]$ halmaz egy ω_1 típusú jólrendezése. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \prec y \\ 0 & x \succeq y \end{cases}$$

Bármely x-re csak megszámlálható sok olyan y van, amely megelőzi x-et a jólrendezésünkben. Ezért bármely rögzített x-re $f(x,y) = 1$ m.m. y-ra, és így $\int_{[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(y) = 1$, tehát

$$\int_{x\in[0,1]} \left(\int_{y\in[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

Megfordítva, bármely $y \in [0,1]$-hez csak megszámlálható sok $x \preceq y$ létezik, tehát rögzített y esetén $f(x,y) = 0$ m.m. x-re, ezért

$$\int_{y\in[0,1]} \left(\int_{x\in[0,1]} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) = 0.$$

Tétel (Friedman, 1980)

A ZFC-vel konzisztens a következő állítás: Legyen $f : [0,1]^2 \to [0,\infty)$ tetszőleges függvény. Ha az $\int_{x\in[0,1]} \left(\int_{y\in[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x)$ és $\int_{y\in[0,1]} \left(\int_{x\in[0,1]} f(x,y) \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y)$ kettős integrálok léteznek, akkor egyenlők. [Friedmann]

Tehát, ha akarjuk, legalábbis pozitív függvények esetén, szabadon szabad cserélgetni a többszörös szummákat és Lebesgue-integrálokat. Ha akarjuk, létezik olyan eset, amikor nem, de nem tudunk konkrét ellenpéldát felírni a ZFC-nél erősebb plusz feltételek felhasználása nélkül.

30. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra. [Petruska, 121, 124–126. o.]

Ha a szorzatmértékek definícióját végtelen sok mértéktér szorzatára akarjuk átvinni, többféle nehézségbe ütközünk: biztosítanunk kell, hogy a tégláink mértékét kifejező — most már végtelen sok tényezős — szorzatok sorrendfüggetlenek legyenek; ráadásul végtelen sok σ-algebra direkt szorzata nem lesz félgyűrű. Az is előfordulhat, hogy megszámlálható soknál több mértékteret szeretnénk összeszorozni, mert éppen olyanunk van, hogy $2^{2^{\aleph_0}}$ független valószínűségi változót szeretnénk konstruálni.

Ezeknek a nehézségeknek egy lehetséges feloldása az, hogy csak valószínűségi mértéktereket szorzunk össze, amelyekben a teljes tér mértéke 1, ($[0,1]$-beli számok végtelen szorzata már nem függ a sorrendtől), továbbá csak olyan téglákat használunk, amelyeknek véges sok kivétellel minden éle a megfelelő teljes tér (hasonlóan például a topologikus terek szorzatához).

Egy következő állomás lehetne az olyan téglák megengedése, amelyeknek megszámlálható sok kivétellel minden éle az egész tér, de az ilyenek úgyis benne lesznek a generált σ-algebrában.

Mostantól tehát legyen I tetszőleges számosságú, de azért nem üres indexhalmaz, és minden $i \in I$-re $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valamilyen valószínűségi mértéktér.

A leendő szorzatmérték alaphalmaza az X_i halmazok szorzata, $Z = \times_{i\in I} X_i$ lesz. Ez tekinthető az olyan, I-n értelmezett függvények halmazának, amelyek minden $i \in I$-hez X_i-beli pontot rendelnek. Ha $I = \mathbb{N}$, akkor a $Z = \times_{i\in I} X_i = \times_{i=1}^{\infty} X_i$ halmaz elemei végtelen sorozatok.

A téglák az olyan $T = \times_{i\in I} A_i$ "hengerhalmazok" lesznek, amelyekben minden $i \in I$-re $A_i \in \mathcal{M}_i$, és véges sok i index kivételével $A_i = X_i$. Az A_i halmazt (így, egymás közt, nem hivatalosan) a T tégla i-edik "oldalának" fogjuk hívni.

A tégláink halmazát jelölje most is $\mathcal{T}$, tehát

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigtimes_{i\in I} A_i : \forall i \in I \ A_i \in \mathcal{M}_i, \text{ és } \{i \in I : A_i \neq X_i\} \text{ véges} \right\}.$$

A $T = \times_{i\in I} A_i$ téglához hozzárendeljük a

$$\alpha(T) = \prod_{i\in I} \mu_i(A_i)$$

számot. A szorzatban véges sok i kivételével minden tényező 1, így vehetjük csak az 1-nél kisebbek szorzatát, vagy a véges részszorzatok minimumát.

Lemma

(a) $\mathcal{T}$ félgyűrű.
(b) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény additív.
(c) Az $\alpha : \mathcal{T} \to [0,1]$ téglafüggvény σ-szubadditív.

Bizonyítás. (a) Ahhoz, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű legyen, három dolog kell: $\emptyset \in \mathcal{T}$, bármely két tégla metszete tégla, és bármely két tégla különbsége előáll, mint véges sok tégla diszjunkt uniója.

Az üres halmaz is tégla, az egyik A_i-t választhatjuk $\emptyset$-nek.

Legyen $T = \bigtimes_{i \in I} A_i$ és $U = \bigtimes_{i \in I} B_i$ két tégla. Legyen $J \subset I$ az olyan indexek halmaza, amelyekre $A_i \neq X_i$ vagy $B_i \neq X_i$. Átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 29 definícióban. :-)

(b) Tegyük fel, hogy egy T tégla az $U_1, \ldots, U_n$ téglák diszjunkt uniója. Legyen $J \subset I$ az olyan i indexek halmaza, amelyekre valamelyik téglánk i-edik éle nem az egész tér; ez véges sok véges indexhalmaz uniója, vagyis J véges. Ismét csak átindexelve, feltehetjük, hogy $J = \{1, 2, \ldots, N\}$ Innen pedig minden ugyanúgy megy, mint a 29 definícióban. :-)

(c) Indirekt tegyük fel, hogy α nem σ-szubadditív, vagyis van olyan T tégla, ami lefedhető az $U^1, U^2, \ldots$ téglák uniójával úgy, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T)$. Nyilván mindegyik U^n-et lecserélhetjük az $U^n \cap T$ téglával, így a fedés tovább csökken. Tehát feltehetjük, hogy $U^n \subset T$.

Az itt szereplő téglák élei összesen megszámlálható sok irányban lehetnek kisebbek, mint a megfelelő mértéktér; ezeket átindexelhetjük pozitív egészekkel. Az összes többi irányban minden szorzat minden tényezője 1. Tehát feltehetjük, hogy átindexelés után $I = \mathbb{N}$, a direkt szorzatok elemei sorozatok.

Legyen $T = \bigtimes_{i=1}^{\infty} A_i$ és minden n-re $U^n = \bigtimes_{i=1}^{\infty} B_i^n$. Mivel $U^n \subset T$, az is igaz, hogy minden i indexre $B_i^n \subset A_i$. Az indirekt feltevés szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(U^n) < \alpha(T),$$

vagyis

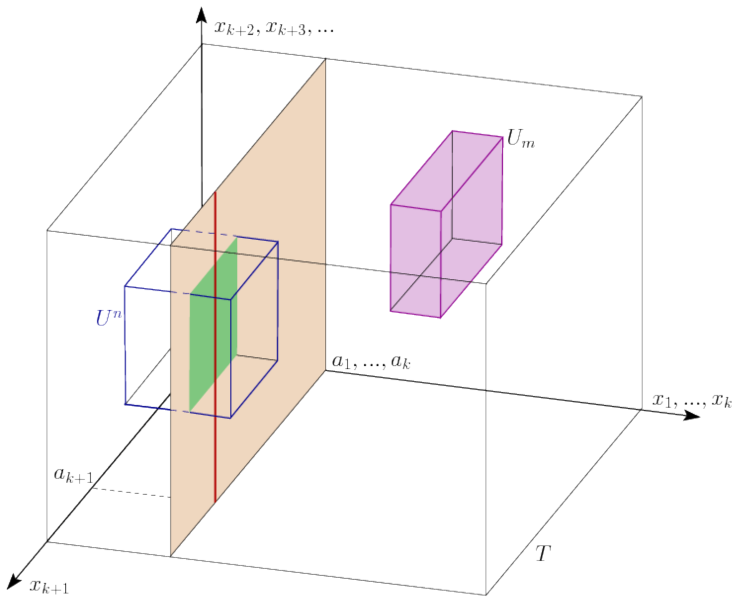
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_i). \tag{1}$$

Rekurzívan konstruálunk egy olyan $t = (a_1, a_2, \ldots) \in T$ pontot, ami a következőt fogja tudni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \quad \text{minden } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ esetén.} \tag{2}$$

Ha $k = 0$, akkor az első produktum üres, ezt most is 1-nek definiáljuk.

A (2) szemléletes jelentése a következő. Vegyük az $x_1 = a_1, \ldots, x_k = a_k$ hipersíkot, és az összes tégláink "nyomát" — metszetét a hipersíkkal. A baloldalon az első produktum értéke 0 vagy 1 attól függően, hogy az U^n tégla elmetszi-e a hipersíkot. A másik két produktum a hipersíkra eső vetületek módosított mértéke, amit érthetően az első k koordináta nélkül számolunk, ezért megy az index $(k+1)$-től. A (2) formula tehát azt fejezi ki, hogy az U^n téglák nyomának összege a hipersíkon kisebb, mint a T tégla nyoma.



A $k = 0$ esetben (2) egybeesik (1)-gyel, tehát igaz.

Ha k pozitív egész, és $a_1, \ldots, a_{k-1}$ már megvan, akkor vizsgáljuk a következő függvényt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right)$$

(vagyis (2) baloldalán az a_k helyére az x változót tettük). Olyan $a_k \in A_k$ pontra van szükségünk, amelyre $f(a_k) < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$.

Az A_k halmazon integrálva,

$$\int_{A_k} f(x) \mathrm{d}\mu_k(x) \overset{\text{B.L.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_k} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \chi_{B_k^n}(x) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \mathrm{d}\mu_k(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right)$$

$$\overset{(2)\ (k-1)\text{-re}}{<} \prod_{i=k}^{\infty} \mu_i(A_i) = \int_{A_k} \left(\prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \right) \mathrm{d}\mu_k(x).$$

Az f integrálja kisebb, tehát az A_k halmaz egy pozitív mértékű részén $f < \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i)$; ebből a pozitív mértékű részből válasszunk egy a_k pontot.

Ezzel megkonstruáltuk a (2)-nak eleget tevő $t = (a_1, a_2, \ldots)$ sorozatot.

Az indirekt feltevésünk szerint a t pontot fedi valamelyik U^m tégla, vagyis minden i-re $\chi_{B_i^m}(a_i) = 1$. Az U^m egy hengerhalmaz, tehát véges sok i index kivételével $B_i^m = X_i$, ezért elég nagy k esetén

$$1 = \prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^m}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^m) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \chi_{B_i^n}(a_i) \cdot \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(B_i^n) \right) \overset{(2)}{<} \prod_{i=k+1}^{\infty} \mu_i(A_i) \leqslant 1,$$

ellentmondás. Tehát α tényleg σ-szubadditív.

Definíció

Az $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ valószínűségi mértékterek $(i \in I)$ szorzata a $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ mértéktér, ahol $Z = \times_{i \in I} X_i$, φ_α az α-hoz asszociált külső mérték a Z halmazon, $\mathcal{S}$ a φ_α szerint mérhető halmazok rendszere, és φ a φ_α megszorítása $\mathcal{S}$-re.

VII. rész

Kitekintések

22

31. Lp-terek

L_p-normák. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Konjugált kitevők, Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség. Faktorizálás a m.m. 0 függvények terével. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). [Petruska, 127–130. o.]

Egy rögzített $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktéren majdnem mérhető függvényekkel fogunk dolgozni. A képhalmaz $\overline{\mathbb{R}}$ vagy $\mathbb{C}$ is lehet, tehát vannak "valós L_p terek" és "komplex L_p terek" is.

Definíció

Egy majdnem mérhető függvény p-edik normája az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ téren:
$0 < p < \infty$ esetén

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p};$$

$p = \infty$ esetén

$$\inf \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \min\{K : \ |f| \leqslant K \ \mu\text{-m.m.}\}.$$

(lényeges szuprémum)

Tétel (Hölder-egyenlőtlenség)

Ha $p, q \geqslant 1$ konjugált kitevők, azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és f, g majdnem mérhető függvények, akkor

$$\|f\|_p \cdot \|g\|_q \geqslant \|fg\|_1.$$

Bizonyítás. Triviális esetek:

- Ha $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_q = 0$, akkor $f = 0$ μ-m.m, illetve $g = 0$ μ-m.m, ilyenkor mindkét oldal 0.

- Ha $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ egyike sem 0, és legalább az egyik ∞, akkor a baloldal végtelen.

- Ha $p = 1$, akkor $q = \infty$, és
$$\|f\|_p \cdot \|g\|_q = \int_X |f| \mathrm{d}\mu \cdot \operatorname{ess\,sup} |g| \geqslant \int_X |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\mu = \|fg\|_1.$$

- Ugyanígy trivi, ha $p = \infty$ és $q = 1$.

A továbbiakban feltesszük, hogy $1 < p, q < \infty$, $0 < \|f\|_p < \infty$ és $0 < \|g\|_q < \infty$. Sőt, a homogenitás miatt A két függvényt normálhatjuk, ezért azt is feltehetjük, hogy $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

A súlyozott számtani-mértaniból
$$\frac{1}{p} \cdot |f|^p + \frac{1}{q} \cdot |g|^q \geqslant \left(|f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(|g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = |f| \cdot |g|,$$
és ez az olyan pontokban is igaz, ahol $|f| = \infty$ vagy $|g| = \infty$. Integrálva
$$\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 1 = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \int_X \left(\frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\right) \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X |f| \cdot |g| \mathrm{d}\mu = \|fg\|_1.$$

Következmény (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség)

Ha f, g majdnem mérhető függvények, akkor
$$\|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \geqslant \|fg\|_1.$$

Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség)

Ha $1 \leqslant p \leqslant \infty$, és f, g majdnem mérhető, összeadható függvények, akkor
$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. Triviális esetek:

- Ha $p = 1$, akkor
$$\|f + g\|_1 = \int_X |f + g| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f| \mathrm{d}\mu \leqslant + \int_X |f| \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

- Ha $p = \infty$, akkor

$$\|f+g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f+g| \leqslant \operatorname{ess\,sup}|f| + \operatorname{ess\,sup}|g| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

- Ha $\|f\|_p = \infty$, $\|g\|_p = \infty$ vagy $\|f+g\|_p = 0$.

A továbbiakban $1 < p < \infty$, a p-hez tartozó konjugált kitevő $q = \frac{p}{p-1}$, $\|f\|_p$ és $\|g\|_p$ is véges, és $\|f+g\|_p > 0$.

Egy triviális becslés:

$$\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X \Big(2\max\big(|f|,|g|\big)\Big)^p \mathrm{d}\mu \leqslant 2^p \int_X \big(|f|^p+|g|^p\big)\mathrm{d}\mu = 2^p\big(\|f\|_p{}^p+\|g|_p{}^p\big) < \infty,$$

tehát $\|f+g\|_p$ egy véges, pozitív szám; szabad vele egyenlőtlenségeket szorozni és osztani.

A Hölder-egyenlőtlenséget a q,p kitevőkkel fogjuk alkalmazni, és kihasználjuk, hogy $p-1 = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p{}^p = \int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f+g|^{p-1}\cdot\big(|f|+|g|\big)\mathrm{d}\mu \leqslant \\ \leqslant \int_X |f+g|^{p/q}\cdot|f|\mathrm{d}\mu + \int_X |f+g|^{p/q}\cdot|g|\mathrm{d}\mu \\ \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \Big\||f+g|^{p/q}\Big\|_q \|f\|_p + \Big\||f+g|^{p/q}\Big|_q \|g\|_p = \\ = \|f+g\|_p{}^{p/q}\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big) = \|f+g\|_p{}^{p-1}\big(\|f\|_p+\|g\|_p\big).\end{aligned}$$

Ezt elosztva $\|f+g\|_p{}^{p-1}$-nel, kész vagyunk.

Következmény

Minden egyes $1 \leqslant p \leqslant \infty$ esetén, az olyan majdnem mérhető f függvények, amelyekre $\|f\|_p$ véges, vektorteret alkotnak.

Definíció

$1 \leqslant p \leqslant \infty$ esetén $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ a véges p-normájú függvények tere, faktorizálva a m.m. nulla függvények alterével. Ezen a $\|.\|_p$ tényleg norma, tehát L_p egy normált vektortér.

Példák

1. Ha $X = \{1, 2, \ldots, d\}$ és μ a számlálómérték, akkor $L_2(X)$ a d-hosszúságú sorozatokból áll, éppen az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér.
2. Ha $X = \mathbb{N}$, akkor a tér a végtelen számsorozatokból áll, a neve (valós vagy komplex) ℓ_p tér. Van, amikor praktikus negatív indexeket is megengedni, tehát $X = \mathbb{Z}$, a tér elemei minkét irányban végtelen sorozatok; pl. Fourier-soroknál.
3. Ha X az $\mathbb{R}^d$ egy pozitív mértékű részhalmaza, és μ a Lebesgue-mérték. Ilyenkor csak az alaphalmazt adjuk meg: $L_2(X)$; $L_2\big([a,b]\big)$ stb.

Megjegyzés. *A különböző p értékekre különböző függvényosztályokat kapunk, általában egyik sem része a másiknak. Például ha $X = (0,\infty)$ és $p < q < \infty$, akkor az $f = \begin{cases} x^{-1/q} & x \in (0,1) \\ 0 & x \in [1,\infty) \end{cases}$ függvény L_p-beli, de nem L_q-beli. A $g = \begin{cases} 0 & x \in (0,1) \\ x^{-1/p} & x \in [1,\infty) \end{cases}$ függvény L_q-beli, de nem L_p-beli.*

Ha $\mu(X)$ véges, akkor $p < q$-ból például a Hölder egyenlőtlenség miatt következik, hogy $L_q \subset L_p$: ha $f \in L_q$, akkor

$$\int_X |f|^p \leqslant \big\||f|^p\big\|_{\frac{q}{p}} \cdot \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q{}^p \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{q-p}{q}} < \infty.$$

Tétel

L_p-ben sűrű az egyszerű függvények altere.
Ha p véges, akkor

$$\begin{aligned} L_p(\mathbb{R}^d) &\overset{\text{sűrű altér}}{\rhd} \text{egyszerű függvények} \\ &\overset{\text{sűrű altér}}{\rhd} \text{"szép" függvények} \\ &\overset{\text{sűrű részhalmaz}}{\supset} \text{rac. "szép" függvények} \end{aligned}$$

ahol a szép függvények a véges sok téglán konstans, azon kívül nulla függvények; a rac. "szép" függvények a racionális értékű, véges sok racionális téglán konstans, azon kívül 0 függvények.
Ha p véges, akkor

$$L_p(\mathbb{R}^d) \overset{\text{sűrű altér}}{\rhd} \text{kompakt tartójú folytonos függvények.}$$

Következmény

Ha p véges, akkor $L_p(\mathbb{R}^d)$ szeparábilis.

Példa

$L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis, mert a $\chi_{(c,\infty)}$ $(c \in \mathbb{R})$ alakú függvényekből kontinuum sok van, és bármelyik kettő távolsága 1, tehát az $\frac{1}{2}$ sugarú környezeteik diszjunktak.

32. Riesz–Fischer tétel

Példák pontonként és L_p-ben (nem) konvergens sorozatokra. Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.) [Petruska, 127–130. o.]

Példák

Az új metrika új konvergenciafogalmat is jelent; a pontonkénti és az L_p-beli konvergencia nem következik egymásból:

1. Az $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ függvénysorozatra $f_n \to 0$ pontonként, de $f_n \overset{L_p}{\not\to} 0$.
2. Legyen $n = 2^k + r$, $0 \leqslant r < 2^k$ esetén $g_n = \chi_{[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k})}$, tehát először a nagyra nőtt Jeff, majd egyre kisebb vakondok dugják ki a fejüket, de $[0,1)$ minden pontjában végtelen sok alkalommal. Ha $p < \infty$, akkor $g_n \overset{L_p}{\to} 0$, de $g_n \not\to 0$ pontonként.
3. Az L_∞-beli konvergencia a majdnem egyenletes konvergenciát jelenti, tehát egy nullmértékű halmazt elhagyva a függvénysorozat egyenletesen konvergál.

1 Lemma. *Ha $f_1, f_2, \ldots \geqslant 0$ majdnem mérhető függvények, akkor*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

Bizonyítás. Ha $p = \infty$: m.m. x-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty.$$

Ha $p < \infty$, akkor

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right\|_p = \left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\int_X \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} =$$

$$\overset{x^p\text{ folyt.}}{=} \left(\int_X \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \overset{\text{m.k.}}{=} \left(\lim_{N\to\infty}\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} =$$

$$\overset{x^{1/p}\text{ folyt.}}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n\right\|_p \leqslant$$

$$\overset{\text{Minkowski}}{\leqslant} \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\|f_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p.$$

Tétel (Riesz–Fischer)

Az $L_p(X, \mathcal{M}, \mu)$ metrikus tér teljes, azaz minden Cauchy-sorozat konvergens.

Bizonyítás. A program: Kérjünk egy tetszőleges Cauchy-tulajdonságú (f_n) sorozatot az ellenségtől; ehhez konstruálunk limeszfüggvényt. Abban nem reménykedhetünk, hogy a (f_n) sorozat pontonként konvergens, de lesz egy alkalmas részsorozata, ami m.m. pontban konvergens. A részsorozat pontonkénti limesze lesz az L_p értelében vett limeszfüggvény.

A Cauchy-tulajdonság $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$-ra azt mondja, hogy

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \quad \forall m, n \geqslant n_k \quad \|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Az n_k indexeket tetszés szerint megnövelhetjük, ezért még azt is azt is feltehetjük, hogy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Legyen $g_k = f_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. A következőket bizonyítjuk erről a részsorozatról:

1. A g_k sorozat m.m. pontban konvergens; a limeszfüggvényét jelölje g.
2. $g \in L_p$ és $g_k \xrightarrow{L_p} g$.
3. $f_n \xrightarrow{L_p} g$.

1. Legyen $h_1, h_2, \ldots$ az a függvénysorozat, amelyre $g_k = h_1 + h_2 + \ldots + h_k$, tehát $h_1 = g_1$, és $i \geqslant 2$ esetén $h_i = g_i - g_{i-1}$. Legyen $d = \sum_{i=1}^{\infty} |h_i|$.

Az n_{k-1} definíciója miatt

$$\|h_k\|_p = \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad (k \geqslant 2),$$

$$\|d\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \right\|_p \overset{\text{Lemma}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty} \|h_k\|_p \leqslant \|h_1\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \infty.$$

Emiatt $d(x)$ m.m. x-re véges. Ha viszont egy x pontban $d(x) = \sum |h_k(x)|$ véges, akkor a $\sum h_k(x)$ sor konvergens, azaz a $(g_k(x))$ sorozat konvergens. Legyen $g = \lim g_k = \sum_{i=1}^{\infty} h_i$. (Ez egyelőre pontonkénti limesz.)

2.

$$\|g - g_k\|_p = \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} h_i \right\|_p \overset{\text{Lemma}}{\leqslant} \sum_{i=k+1}^{\infty} \|h_i\|_p \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2}{2^k}.$$

3. Ha $n \geqslant n_k$, akkor

$$\|g - f_n\|_p \leqslant \|g - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p = \|g - g_k\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p < \frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{3}{2^k}.$$

Ezzel tetszőleges $L_p(X)$-beli Cauchy-sorozathoz konstruáltunk (L_p értelemben vett) limeszfüggvényt.

Definíció

Azokat a normált vektortereket, amelyek egyben teljes metrikus terek is, Banach-térnek hívjuk.

33. Mértékben való konvergencia

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség. [Petruska, 135–137. o.]

Definíció

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, M a majdnem mérhető, m.m. véges függvények vektortere, faktorizálva a m.m. nulla függvények terével.
Az $f_1, f_2, \ldots \in M$ függvénysorozat mértékben tart a $g \in M$ függvényhez (jele: $f_n \overset{m}{\to} g$ vagy $f_n \overset{\mu}{\to} g$, ha

$$\forall \delta > 0 \ \mu\Big(X\big(|f_n - g| \geqslant \delta\big)\Big) \to 0.$$

Definíció

Definiálhatjuk M-en a következő metrikát:

$$d(f, g) = \min\left(1, \inf\left\{\delta + \mu\Big(X\big(|f_n - g| \geqslant \delta\big)\Big) : \delta > 0\right\}\right).$$

Tétel

(a) A d függvény eltolásinvariáns metrika.
(b) $f_n \overset{m}{\to} g$ akkor és csak akkor, ha $d(f_n, g) \to 0$.

Bizonyítás. (a) Csak a háromszög-egyenlőtlenség nem triviális; azt akarjuk igazolni, hogy $d(f, g) + d(g, h) \geqslant d(f, h)$. Ha $d(f, g) = 1$ vagy $d(g, h) = 1$, akkor persze trivi.

Ha $d(f, g) < 1$ és $d(g, h) < 1$ akkor vegyünk egy tetszőleges ε-t. Ehhez létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy

$$\delta_1 + \mu\Big(|f - g| \geqslant \delta_1\Big) < d(f, g) + \varepsilon,$$

$$\delta_2 + \mu\Big(|g - h| \geqslant \delta_2\Big) < d(g, h) + \varepsilon;$$

$$\begin{aligned}
d(f,h) &\leqslant \delta_1 + \delta_2 + \mu\Big(|f-h| \geqslant \delta_1 + \delta_2\Big) \\
&\leqslant \delta_1 + \delta_2 + \mu\Big(|f-g| \geqslant \delta_1\Big) + \mu\Big(|g-h| \geqslant \delta_2\Big) \\
&< d(f,g) + d(g,h) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Végül szokás szerint $\varepsilon \to 0$.

(b, $\Rightarrow$) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, $\delta = \varepsilon/2$. Ekkor van olyan n_0 küszöbindex, hogy $n \geqslant n_0$ esetén $\mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < \delta$. Akkor pedig

$$d(f_n, g) \leqslant \delta + \mu\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < 2\delta = \varepsilon.$$

(b, $\Leftarrow$) Legyen $\delta_0 > 0$ és $0 < \varepsilon < \min(1, \delta_0)$. Olyan n_0 kell, hogy $n \geqslant n_0$ esetén $\Big(|f_n - g| \geqslant \delta\Big) < \varepsilon$.

Legyen n_0, hogy $n \geqslant n_0$-ra $d(f_n, g) < \varepsilon$).

$$\begin{gathered}
d(f_n, g) < \varepsilon \leqslant 1 \\
\inf\Big\{\delta + \mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta\right)\Big)\Big\} < \varepsilon \\
\exists \delta > 0 \quad \delta + \mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta\right)\Big) < \varepsilon \leqslant \delta_0 \\
\delta \leqslant \delta_0, \\
\mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta_0\right)\Big) \leqslant \mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta\right)\Big) < \varepsilon.
\end{gathered}$$

Tétel

Ha $f_n \xrightarrow{L_p} g$, akkor $f_n \xrightarrow{m} g$.

Bizonyítás. Ha $p = \infty$, akkor a konvergencia egy nullmértékű halmaztól eltekintve egyenletes.

Ha $p < \infty$, akkor

$$\begin{gathered}
\|f_n - g\|_p{}^p = \int_X |f_n - g|^p \mathrm{d}\mu \geqslant \mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta\right)\Big) \cdot \delta^p, \\
\mu\Big(X\left(|f_n - g| \geqslant \delta\right)\Big) \leqslant \frac{\|f_n - g\|_p{}^p}{\delta^p} \to 0.
\end{gathered}$$

Példa

Abból, hogy $f_n \to g$ pontonként, nem következik, hogy $f_n \xrightarrow{m} g$. Például az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ mértéktérben az $f_n = \chi_{(n,\infty)}$ sorozat pontonként tart 0-hoz, mégis $d(f_n, 0) = 1$.

Tétel

Ha $f_n \to g$ pontonként, és μ véges, akkor $f_n \xrightarrow{m} g$.

Bizonyítás. Legyen $\delta > 0$ tetszőleges.

$$\mu\big(|f_n - g| \geqslant \delta\big) \leqslant \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_k - g| \geqslant \delta\big)\right) \to \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} X\big(|f_n - g| \geqslant \delta\big)\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Tétel

A (M, d) metrikus tér teljes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f_n egy Cauchy-sorozat; ehhez szeretnénk mértékbeli limeszfüggvényt.

Minden k-ra legyen n_k olyan, hogy $n, m \geqslant n_k$ esetén $d(f_n, f_m) < \frac{1}{2^k}$, és legyen $A_k = X\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big)$.

Alkalmas δ-val

$$\delta + \mu\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \delta\Big) < \frac{1}{2^k},$$

de akkor $\delta < \frac{1}{2^k}$, és így

$$\mu(A_k) = \mu\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \frac{1}{2^k}\Big) \leqslant \mu\Big(\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geqslant \delta\Big) < \frac{1}{2^k}.$$

Bármely k esetén, az $A_k \cup A_{k+1} \cup \dots$ halmazon kívül az (f_{n_k}) részsorozat egyenletesen Cauchy, így az is igaz, hogy m.m.pontban konvergens. Legyen $g = \lim f_{n_k}$ a pontonkénti limesz.

Az $A_k \cup A_{k+1} \cup \dots$ halmazon kívül $|f_{n_k} - g| < \frac{2}{2^k}$, ezért

$$d(f_{n_k}, g) \leqslant \frac{2}{2^k} + \mu\left(|f_{n_k} - g| \geqslant \frac{2}{2^k}\right) < \frac{4}{2^k}.$$

Tehát $f_{n_k} \xrightarrow{m} g$; ebből következik, hogy $f_n \xrightarrow{m} g$.

34. L2-terek, ortogonális függvénysorok

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Az $L_2([a,b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. [Petruska, 24. fej.]

A leggyakrabban előforduló esetek persze a legegyszerűbb L_1 és L_∞, no meg — a skaláris szorzás miatt — az L_2.

Definíció

Az $f, g \in L_2(X, \mathcal{M}, \mu)$ függvények skaláris szorzata

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, \mathrm{d}\mu.$$

Ennek megvannak a véges dimenziós algebrából jól ismert tulajdonságai, pl. $\langle f, f\rangle = \|f\|^2$, valósban bi- komplexben szeszkilinearitás, lehet véges sok vektorra Gram–Schmidt ortogonalizációt végezni stb.

A Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség szerint

$$\left|\langle f, g\rangle\right| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Definíció

Az olyan Banach-tereket, amelyekben van skaláris szorzás, és $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$, (valós, illetve komplex) Hilbert-tereknek hívjuk.

Legendre-polinomok

Legyen most $[a,b]$ korlátos, zárt intervallum. Az $L_2([a,b])$ térben az $1, x, x^2 \ldots$ sorozatból Gram–Schmidt ortogonalizációval nyert ortogonális polinomokat nevezzük Legendre-polinomoknak. Legyenek $\omega_0, \omega_1, \ldots$ a négyzetesen normált Legendre-polinomok, azaz $\deg \omega_k = k$, $\|\omega_k\|_2 = 1$ és $j \neq k$ esetén $\langle \omega_j, \omega_k\rangle = 0$.

Ha egy tetszőleges $f \in L_2$ függvényhez keressük a legközelebbi polinomot a legfeljebb k-adfokú polinomok terében, akkor jól ismert (és ez egy véges dimenziós állítás), hogy a legközelebbi p polinom a merőleges vetület, tehát

$$p = \sum_{j=0}^{k} c_j \omega_j, \quad \text{ahol} \quad c_j = \langle f, \omega_j\rangle \quad \text{az } f \text{ vetülete az } \omega_j \text{ irányára.}$$

Tétel

Legyen $f \in L_2([a,b])$ tetszőleges függvény és $c_j = \langle f, \omega_j \rangle$. Ekkor

$$\sum_{j=0}^{k} c_j \omega_j \quad \xrightarrow{L_2} \quad f \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Bizonyítás. Vegyük egy rögzített ε-t.

Válasszunk egy olyan g folytonos függvényt, amelyre $\|f-g\|_2 < \varepsilon$.

Weierstrass I. aproximációs tétele szerint a folytonos függvények jól közelíthetők polinomokkal: a $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan q polinom, amelyre $\max |g-q| < \varepsilon$.

Legyen $k = \deg q$, és legyen $p = \sum_{j=0}^{k} c_j \omega_j$ az f merőleges vetülete a legfeljebb k-adfokú polinomok alterére. Ekkor tehát

$$\|f-p\|_2 \leqslant \|f-q\|_2 \leqslant \|f-g\|_2 + \|g-q\|_2 < \varepsilon + \varepsilon.$$

Ez a tétel egy újfajta bázisfogalmat is ad: az f koordinátái az ortonormált polinomok bázisában a c_j számok, de most nem csak véges sok nemnulla lehet közöttük. Ezért az összeget is mint L_2 értelemben konvergens függvénysort kell értelmeznünk.

A koordinátairányokra való vetítés egy természetes megfeleltetést ad az $L_2([a,b])$ és ℓ_2 terek között: minden $f \in L_2([a,b])$ függvényt megfeleltethetünk a (c_j) sorozatnak.

Trigonometrikus polinomok

Polinomok helyett trigonometrikus függvényeket is használhatunk, így kapjuk a Fourier-sorokat. Pl. a $[0, 2\pi]$ intervallumon, komplex alakban írva, az e^{inx} alakú függvények ($n \in \mathbb{Z}$) ortogonálisak. Ha az alap intervallumunk a $[0,1]$ polinom, akkor az $e^{2\pi inx}$ polinomok lesznek ortogonálisak. Az ilyenek lineáris kombinációit hívjuk trigonometrikus polinomoknak.

Weierstrass II. approximációs tétele szerint a 2π szerint periodikus folytonos függvény közelíthető trigonometrikus polinomokkal, és a fenti bizonyítás is átvihető. A Fourier-sor k-adik együtthatója az $f(x)$ és az $e^{2\pi ikx}$ függvény skaláris szorzata, ezt az $\widehat{f}(k)$ szimbólummal is szokás jelölni:

Definíció (Fourier-együttható)

Legyen $f \in L_2([0,1])$ tetszőleges függvény és k egész szám. Az f függvény k-adik Fourier-együtthatója

$$\widehat{f}(k) = \int_{[0,1]} e^{-2\pi i k x} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x).$$

34.1 Tétel

Tetszőleges $f \in L_2([0,1])$ tetszőleges függvényre

$$\sum_{|k| \leqslant n} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \quad \xrightarrow{L_2} \quad f \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Ez persze nem ígér sokat a pontonkénti konvergenciáról...
Fejér Lipót észrevétele volt, hogy a részletösszegek átlaga szépen viselkedik.

Tétel (Fejér)

Ha $f(x)$ 1 szerint periodikus, folytonos függvény, a Fourier-együtthatói

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi i k x} f(x) \, \mathrm{d}x,$$

a Fourier-részletösszegei

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x},$$

akkor

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n} \to f(x)$$

egyenletesen.

35. L1-függvények konvolúciója

L_1-beli függvények konvolúciója. L_1 mint kommutatív Banach-algebra. [Petruska, 138. o.]

Példák

Tegyük fel, hogy fényképet készítünk; a fényességet egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény írja le. Igen ám, de a kezünk remeg, ezért a képet sokféle y vektorral eltoljuk, és az így eltolt, végtelen sokféle $x \mapsto f(x-y)$ függvényt szuperponáljuk egymásra mindenféle $g(y)$ súlyokkal, Ezért az áhított $x \mapsto f(x)$ függvény helyett az $x \mapsto \int_y g(y) \cdot f(x-y)\,\mathrm{d}y$ elmosódott/szellemképes függvény lesz a kép.
Egy másik példa a polinomok és hatványsorok szorzása, a Cauchy-szorzat. Az $a_0 + a_1x + \ldots$ és $b_0 + b_1x + \ldots$ polinomok/sorok szorzata $c_0 + c_1x + \ldots$, ahol $c_n = \sum a_k b_{n-k}$.
Független valószínűségi változók összegének vizsgálakor is találkozunk konvolúcióval: ha ξ_1 és ξ_2 független valószínűégi változók, a sűrűségfüggvényük f, illetve g, akkor $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $x \mapsto \int_y g(y) \cdot f(x-y)\,\mathrm{d}y$.

Definíció

Az $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ függvények konvolúcója az

$$(f * g)(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^p} f(y)g(x-y)\mathrm{d}\lambda(y)$$

paraméteres integrállal megadott függvény, ha *valamilyen értelemben* létezik...

Az $\mathbb{R}^p$ vektortér helyett mindenféle *mérhető csoportok*ra is definiálhatjuk a konvolúciót (algebrai csoport, amin még egy eltolásinvariáns mérték is van). A legfontosabb példa a kör, avagy amikor a számegyenest periodikusan, modulo 1 vagy modulo 2π tekintjük.

Tétel

Ha $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^p)$, akkor

(a) az $f * g$ konvolúció m.m. pontban létezik, $f * g \in L_1(\mathbb{R}^p)$ és $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;

(b) ha c, d számok, akkor $(cf + dg) * h = c(f * h) + d(g * h)$ és $f * (cg + dh) = c(f * g) + d(f * h)$;

(c) $f * g = g * f$.

(d) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

A konvolúció tehát egyfajta szorzás (bilineáris operáció) az L_1 téren.

Bizonyítás. (a) Fubini-tétel az $f(y)g(x-y)$ függvényre.

Az $(u, v) \mapsto f(u)g(v)$ függvény mérhető az $(R^p, \lambda_p) \times (R^p, \lambda_p) = (R^{2p}, \lambda_{2p})$ szorzattérben, és ezt komponáljuk az $(x, y) \mapsto (y, x-y)$ lineáris (tehát mérhető) transzformációval, tehát az $F(x, y) = f(y)g(x-y)$ függvény λ_{2p}-mérhető.

Az abszolút érték integrálja

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} \big|f(y)g(x-y)\big| \mathrm{d}\lambda_{2p}(x, y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{y \in \mathbb{R}} \big|f(y)\big| \bigg(\int_{x \in \mathbb{R}} \big|g(x-y)\big| \mathrm{d}\lambda_p(x) \bigg) \mathrm{d}\lambda_p(y)$$
$$= \int_{y \in \mathbb{R}} \big|f(y)\big\|g\big\| \mathrm{d}\lambda_p(y) = \big\|f\big\|_1 \cdot \big\|g\big\|_1$$

ami véges, ezért alkalmazhatjuk a Fubini tételt:

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} f(y)g(x-y) \mathrm{d}\lambda_{2p}(x, y) = \int_{x \in \mathbb{R}} \bigg(\int_{y \in \mathbb{R}} f(y)g(x-y) \mathrm{d}\lambda_p(y) \bigg) \mathrm{d}\lambda_p(x)$$
$$= \int_{x \in \mathbb{R}} (f * g)(x) \, \mathrm{d}\lambda_p(x).$$

A Fubini-tétel miatt a belső integrál m.m. x-re létezik. Továbbá, mivel a kettős integrál véges, a belső integrál is, vagyis $(f * g)(x)$ m.m. x-re véges.

Végül,

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^p} |f * g| \mathrm{d}\lambda_p = \int_{x \in \mathbb{R}^p} \bigg| \int_{y \in \mathbb{R}^p} f(y)g(x-y) \mathrm{d}\lambda_p(y) \bigg| \mathrm{d}\lambda_p(x)$$
$$\leqslant \int_{Rp \times \mathbb{R}^p} \big|f(y)g(x-y)\big| \mathrm{d}\lambda_{2p}(x, y) = \big\|f\big\|_1 \cdot \big\|g\big\|_1.$$

(b) Triviális.

(c) A $y \mapsto z = x - y$ helyettesítéssel (ld. 22 tétel)

$$(f * g)(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^p} f(y)g(x-y)d\lambda(y) = \int_{z\in\mathbb{R}^p} f(x-z)g(z)d\lambda(y) = (g * f)(x).$$

(d) m.m. x-re

$$\begin{aligned}
\big((f*g)*h\big)(x) &= \int_{y\in\mathbb{R}^p} (f*g)(y)\cdot h(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_p(y) \\
&= \int_{y\in\mathbb{R}^p} \left(\int_{z\in\mathbb{R}^p} f(z)\cdot g(y-z)\,\mathrm{d}\lambda_p(z)\right)\mathrm{d}\lambda_p(y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{z\in\mathbb{R}^p} f(z)\left(\int_{y\in\mathbb{R}^p} g(y-z)\cdot h(x-y)\,\mathrm{d}\lambda_p(y)\right)\mathrm{d}\lambda_p(z) \\
&\overset{w=y-z}{=} \int_{z\in\mathbb{R}^p} f(z)\left(\int_{y\in\mathbb{R}^p} g(w)\cdot h(x-z-w)\,\mathrm{d}\lambda_p(w)\right)\mathrm{d}\lambda_p(z) \\
&= \int_{z\in\mathbb{R}^p} f(z)(g*h)(x-z)\,\mathrm{d}\lambda_p(z) = \big(f*(g*h)\big)(x).
\end{aligned}$$

Definíció

Banach-tér szorzással: *Banach-algebra*. Az $L_1(\mathbb{R}^p)$ tér a konvolúcióval egy kommutatív Banach-algebra.

Példa

Az $L_\infty(X)$ tér a pontonkénti szorzással egy másik Banach-algebra.

Konvolúció és Fourier-sorok

A Fourier-sorok konvergenciájának vizsgálata során is gyakran találkozunk konvolúcióval. Tegyük fel, hogy $f(x)$ egy 1 szerint periodikus, integrálható függvény; ennek Fourier-együtthatói, mint láttuk,

$$c_k = \int_{[0,1]} e^{-2\pi ikx} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x).$$

A Fourier-sor n-edik részletösszege

$$\begin{aligned}
s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx} &= \sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{y\in[0,1]} e^{-2\pi iky} f(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)\right)e^{2\pi ikx} \\
&= \int_{y\in[0,1]} f(y)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ik(x-y)}\right)\mathrm{d}\lambda(y).
\end{aligned}$$

Az itt fellépő

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$$

függvény az n-edik *Dirichlet-magfüggvény*. Ezzel a jelöléssel

$$s_n(x) = \int_{y\in[0,1]} f(y)D_n(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y),$$

vagyis

$$s_n = f * D_n.$$

Az első n részletösszeg átlaga

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} = f * \frac{D_0 + D_1 + \ldots + D_{n-1}}{n} = f * F_n,$$

ahol

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + \ldots + D_{n-1}(t)}{n} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{2\pi ikt} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t}\right)^2$$

az n-edik *Fejér-magfüggvény.*

Megjegyzés. *Ha nem 1, hanem 2π szerint periodikus függvényeket vizsgálunk, akkor a képletek módosulnak:*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}, \qquad F_n(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikt} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Az indexelés sem egyértelmű; van, aki szerint $F_n = \frac{D_0+\ldots+D_n}{n+1}$.

36. Fourier-transzformált

Fourier-transzformált. L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. A Fourier-transzformált homomorfizmus az $(L_1,*)$ és $(L_p,\cdot)$ Banach-algebrák között. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja. Fourier-Stieltjes transzformált. [Halász, 1–2. o.]

- Amikor egy polinomba vagy hatványsorba behelyettesítünk egy egységnyi komplex számot, ezt a behelyettített szám argumentumával is felírhatjuk:

$$t \mapsto f(t) = \sum_n a_n (e^{2\pi i t})^n.$$

Két polinom szorzata esetén előbb vehetjük a két együtthatósorozat konvolúciát (Cauchy-szorzatát), és utána helyettesítünk be, vagy előbb külön-külön belyettesítünk, aztán a helyettesítési értékeket simán összeszorozzuk: ha van egy $g(t) = \sum_n b_n (e^{2\pi i t})^n$ függvényünk is, akkor

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_n \left(\sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \right) (e^{2\pi i t})^n.$$

- Nagyon hasonló a Fourier-sorok együtthatóképlete: ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 szerint periodikus, akkor az n-edik Fourier együtthatója

$$c_n = \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi i n x} \mathrm{d}\lambda(x).$$

1 Definíció. *Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformáltja az*

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} \mathrm{d}x$$

paraméteres integrállal megadott függvény, ha ez valamilyen értelemben létezik.

Megjegyzés

Az inverz transzformált képlete

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{2\pi i x s} \mathrm{d}s.$$

(Ennek az értelmezésével is érvényességével még több gond van...)

Megjegyzés. *Ahány ház, annyi szokás, és ugyanannyi alternatív definíció. Ha nem a Fourier-sorok együtthatóformuláját, hanem a sorba való behelyettesítést tekintjük a Fourier-transzformált elődjének, akkor az inverz transzformált képletében lesz a kitevőben negatív előjel. Ha nem* 1*, hanem* 2π *szerint periodikus függvények Fourier-sorából indulunk ki, akkor a kitevőben nincs* 2π*, viszont valahol osztani kell* 2π*-vel, vagy mindkét képletben osztunk* $\sqrt{2\pi}$*-vel.*

	Fourier-transzformált	*inverz transzformáció*
(a)	$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx}\mathrm{d}x$	$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{2\pi ixs}\mathrm{d}s$
(b)	$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixs}\mathrm{d}x$	$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{-isx}\mathrm{d}s$
(c)	$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixs}\mathrm{d}x$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{-isx}\mathrm{d}s$

Az $L_2(\mathbb{R})$ *térben az (a) és (c) is izometria, megtartják a skaláris szorzatot; ezek unitér lineáris transzformációk.*

L1-függvények Fourier-transzformáltja

A 1 definícióban a valamilyen értelem jelentheti a klasszikus improprius integrált vagy $\lim\limits_{K\to\infty}\int_{-K}^{K} f(x)e^{-2\pi ixs}\mathrm{d}x$ *centrált változatát, vagy a Lebesgue-integrált, csak ezek túl kevés esetben lesznek értelmesek.*

Az improprius integrálban szereplő határérték helyett vizsgálhatjuk az átlagnak a határértékét:

$$\lim_{K\to\infty}\frac{1}{K}\int_{L=0}^{K}\left(\int_{-L}^{L} f(x)e^{-2\pi ixs}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}L = \lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\left(1-\frac{|x|}{K}\right)f(x)e^{-2\pi ixs}\mathrm{d}x.$$

Ha az improprius integrál létezik, akkor ez az Cesaro-átlag is létezik, és ugyanannyi.

Ezt tovább általánosíthatjuk, vehetjük az átlag átlaga átlagának az átlagát, ezeknek egyfajta határértékét. A $(1-\frac{|x|}{K})$ *helyén fellépő, egyre simább, de egyre bonyolutabb magfüggvényék helyett haranggörbét* ($e^{-x^2/2K}$) *vagy más sima, szintén gyorsan lecsengő függvényeket is bele lehet tenni a definícióba, így egyre többféle függvénynek lehet a Fourier-transzformáltjáról beszélni.*

Most csak a legegyszerűbb esetet nézzük, amikor a függvény az egész $\mathbb{R}$*-en integrálható.*

Definíció

Egy $f \in L_1(\mathbb{R})$ függvény Fourier-transzformáltja

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i s x} \mathrm{d}\lambda(x).$$

Tétel

Ha $f \in L_1(\mathbb{R})$, akkor

(a) $\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x s} \mathrm{d}x$ minden valós s-re létezik és $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

(b) $\widehat{cf + dg} = c\widehat{f} + d\widehat{g}$ (lineáris)

(c) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

(d) $\widehat{f}$ folytonos.

(e) $\lim\limits_{s \to \pm\infty} \widehat{f}(s) = 0$.

Más szóval, a Fourier-transzformált egy homomorfizmus az $(L_1, *)$ és $(L_\infty, \cdot)$ kommutatív Banach-algebrák között.

Bizonyítás. (a,b) triviális.

(c) Bármely $c \in \mathbb{R}$-re

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(s) &= \int_{x \in \mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2\pi i s x} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{y \in \mathbb{R}} f(y) g(x - y) \mathrm{d}\lambda(y) \right) e^{-2\pi i s x} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i s y} \left(\int_{x \in \mathbb{R}} g(x - y) e^{-2\pi i s (x - y)} \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{y \in \mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i s y} \cdot \widehat{g}(s) \mathrm{d}\lambda(y) = \widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}(s).
\end{aligned}$$

(d) Átviteli elv. Vegyünk egy tetszőleges $s_0 \in \mathbb{R}$ számot és egy hozzá konvergáló $s_1, s_2, \ldots$ sorozatot. Azt kell igazolni, hogy $\widehat{f}(s_n) \to \widehat{f}(s_0)$.

Legyen $g_n(x) = f(x) e^{-2\pi i s_n x}$. Erre a függvényre $g_n(x) \to g_0(x)$ pontonként, és a függvénysorozatot dominálja az integrálható $|f(x)|$ függvény. A dominált konvergencia tétel miatt

$$\widehat{f}(s_n) = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) \mathrm{d}\lambda(x) \to \int_{\mathbb{R}} g_0(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \widehat{f}(s_0).$$

(e) Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ehhez letezik egy olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szép függvény, ani véges sok korlátos intervallumon konstans és azon kívül 0, tehát $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{[a_k,b_k)}$, és $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Az (a)-beli triviális becslés szerint

$$\big|\widehat{f}(s) - \widehat{f}(s)\big| \leqslant \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bármely $s \neq 0$ esetén $e^{-2\pi isx}$ egy primitív függvénye $-\frac{1}{2\pi is}e^{-2\pi isx}$, ezért

$$\begin{aligned}\big|\widehat{g}(s)\big| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{[a_k,b_k)} c_k e^{-2\pi isx} \mathrm{d}\lambda(x)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \left|\int_{a_k}^{b_k} e^{-2\pi isx} \mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \left|\left[-\frac{1}{2\pi is}e^{-2\pi sx}\right]_{a_k}^{b_k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \frac{1}{\pi|s|} = \frac{\sum|c_k|}{\pi|s|},\end{aligned}$$

ami 0-hoz tart. Ezek után legyen $K_\varepsilon = \frac{\sum|c_k|}{\varepsilon}$; erre a számra teljesül, hogy minden $|s| > K_\varepsilon$ esetén $\big|\widehat{g}(s)\big| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, és akkor

$$\big|\widehat{f}(s)\big| \leqslant \big|\widehat{g}(s)\big| + \big|\widehat{f}(s) - \widehat{g}(s)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Inverz transzformált

Az inverz transzformált képletének azt várjuk, hogy

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s)e^{2\pi ixs}\mathrm{d}\lambda(s),$$

csak ez nem feltétlenül létezik, ugyanis $\widehat{f}(s)$ nagyon lassan is tarthat 0-hoz. Ráadásul ez a képlet is csak folytonos, 0-hoz tartó függvényeket állít elő, márpedig az f függvény nem feltétlenül ilyen. Szerencsére a Cesaro-szummázás működik.

Tétel

Ha $f \in L_1(\mathbb{R})$, akkor

$$f(x) = \lim_{K\to\infty} \int_{-K}^{K} \left(1 - \frac{|s|}{K}\right) \widehat{f}(s)e^{2\pi ixs}\mathrm{d}s$$

majdnem minden x-re (pl. az f Lebesgue-pontjaira igaz.)

A tételt itt nem bizonyítjuk; elolvashatjátok a Halász-jegyzetben [Halász, 1–5].

Következmény

Ha $f \in L_1(\mathbb{R})$ és $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, akkor

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s) e^{2\pi i x s} \mathrm{d}\lambda(s)$$

majdnem minden x-re.

Mértékek Fourier-transzformáltja

A Radon–Nikodym tétel miatt az integrálható függvényeket azonosíthatjuk a véges, abszolút folytonos előjeles mértékekkel. Ha $f \in L_1(\mathbb{R})$, és $\vartheta(H) = \int_H f \mathrm{d}\lambda$ az f integrálásából származó előjeles mérték, akkor

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x s} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x s} \mathrm{d}\vartheta(x).$$

Ezt a képletet persze kiterjeszthetjük bármilyen véges mértékre.

Definíció

- Ha ϑ véges előjeles vagy komplex Borel-mérték $\mathbb{R}$-en, akkor a Fourier-transzformáltja
$$\widehat{\vartheta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x s} \mathrm{d}\vartheta(x).$$
- Ezzel ekvivalensen, ha a ϑ egy eloszlásfüggvénye F, akkor
$$\widehat{\vartheta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x s} \mathrm{d}F(x).$$

  Az utóbbi képletet hívhatjuk *az F függvény Fourier–Stieltjes transzformáltjának*.

Definíció

- Ha ξ valós értékű valószínűségi változó, az eloszlása a P valószínűségi Borel-mérték, eloszlásfüggvénye $F(x) = P(\xi < x)$, akkor a ξ *karakterisztikus függvénye*

$$\varphi_\xi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \mathrm{d}P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \mathrm{d}F(x) = E(e^{is\xi}).$$

- Ha ξ abszolút folytonos, akkor létezik egy f sűrűségfüggvénye, és

$$\varphi_\xi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixs} \mathrm{d}\lambda(x).$$

(Félre: Ez is mutatja, hogy a Fourier-transzformált összes változatára fel kell készülnünk, $\pm 2\pi$-vel és anélkül...)

A karakterisztikus függvényeknek azokban a határeloszlás-tételekben, amikor sok független valószínűségi változót adunk össze, fontos szerepük van. Ugyanis az összeg sűrűségfüggvénye a sűrűségfüggvények konvolúciója, és sokkal könnyebb a karakterisztikus függvényeket pontonként összeszorozni vagy éppen egyetlen függvényt hatványozni, mint konvolúcióhatványokat számolni.

Valós analízis IV. tételjegyzék[3]

2022/2023, II. félév

1. Green-tétel
2. Integráltételek síkban
3. Integráltételek három dimenzióban
4. Halmazstruktúrák, Borel-halmazok
5. Halmazfüggvények, mértékek
6. Lebesgue-mérték
7. Relatív külső mértékek
8. Teljes mértékterek
9. A mértékkiterjesztési tétel
10. Lebesgue-Stieltjes mértékek egy dimenzióban
11. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban.
12. Lokálisan véges Borel-mértékek regularitása
13. Mérhető függvények
14. Nemnegatív függvények integrálja
15. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja
16. Valós és komplex értékű függvények integrálja
17. Függvénysorozatok integrálja
18. A Riemann-integrál létezésének feltételei
19. Előjeles mértékek variációi
20. Előjeles mértékek felbontási tételei
21. Lebesgue-felbontás
22. Radon–Nikodym derivált
23. Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja
24. A maximális operátor tétele
25. Borel-mértékek differenciálása
26. A sűrűségi tétel
27. Abszolút folytonos függvények
28. Szinguláris függvények
29. Véges sok mértéktér szorzata
30. Végtelen sok mértéktér szorzata
31. L_p-terek
32. Riesz–Fischer tétel
33. Mértékben való konvergencia
34. L_2-terek, ortogonális függvénysorok
35. L_1-függvények konvolúciója
36. L_1-függvények Fourier-transzformáltja

Sorszám, név	Differenciális alak	Integrális alak
I. Gauss-törvény	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \mathrm{d}V = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$
II. Faraday–Lenz törvény	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$
III. Gauss mágneses törvénye	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = 0$
IV. Ampère-törvény	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$

[3] *Ez csak tervezet, a félév végéig még változhat.*

Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)[4]

2022/2023, II. félév

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Részletes tételjegyzék

1. Green-tétel

A vonalintegrál általánosításai. Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). [LTS2, 200–204. o.]

2. Integráltételek síkban

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. Stokes-tétel 2-dimenzióban.

3. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Területelem, normálvektor, felszín. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafikon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció 3-dimenzióban. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.) [LTS2, 211–221. o.]

---

[4] *Ez csak tervezet, a félév végéig még változhat.*

4. Halmazstruktúrák, Borel-halmazok

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, σ-additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$-n. Banach–Tarski paradoxon (bizonyítás nélkül); nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$-ön. Halmazrendszerek: halmazgyűrű, algebra, σ-gyűrű, σ-algebra, modulus, félgyűrű. Félgyűrűben véges és megszámlálható unió átalakítása diszjunkt halmazok uniójára. Generált struktúrák. Megszorítás. Borel-halmazok topologikus terekben. [Petruska, 51–52, 55, 81–82. o.]

5. Halmazfüggvények, mértékek

Kiterjesztett számegyenes. Halmazfüggvények. Monoton, additív σ-additív, szubadditív, σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Előjeles és komplex mértékek. Mértéktér. Számosságmérték, Dirac-mérték. A mértékek additivitása, monotonitása és folytonossága.

6. Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

7. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.

8. Teljes mértékterek

Külső mérték szerint nullmértékű halmaz. A nullmértékű halmazok mérhetőek. Teljes mértéktér. Teljes mértéktér megszorítása teljes. A Lebesgue-mérték teljes. Minden mértéktér tejessé tehető.

9. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. σ-végesség. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. Minden Jordan-mérhető és minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető. A $\mathcal{L}_p =$, illetve a $\mathcal{B}$ algebrán a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásnvariáns mérték.

10. Lebesgue-Stieltjes mértékek egy dimenzióban

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték. Eloszlásfüggvény. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

11. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban.

Kiterjesztés véges dimenzióban. Eloszlásfüggvény. Addititív téglafüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték véges dimenzióban. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

12. Lokálisan véges Borel-mértékek regularitása

Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. Mérhető halmazok "távolsága". Minden véges mértékű, Lebesgue–Stieltjes mérhető halmazhoz van tetszőlegesen közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója.

13. Mérhető függvények

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció), megszámlálható sok mérhető függvény pontonkénti szuprémuma, infimuma, liminfje, limszupja, a konvergenciahalmaz mérhetősége. Luzin tétele.

14. Nemnegatív függvények integrálja

$0 \cdot \infty = 0$. Egyszerű függvények. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek.

15. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétel. A MKT. nem igaz csökkenő sorozatra. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Végtelen táblázat összege mint a BLT speciális esete. Fatou-lemma. Példák, amikor a Fatou-lemmában nincs egyenlőség, illetve limsuppal egyik irányban sem igaz. Rögzített mérhető, nemnegatív függvény integrálja mérték.

16. Valós és komplex értékű függvények integrálja

Előjeles és komplex függvények integrálja. Műveletek. Rögzített függvény integrálja, mint előjeles/komplex mérték.

17. Függvénysorozatok integrálja

Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum \int |f_n|$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m.

18. A Riemann-integrál létezésének feltételei

Alulról és felülről folytonos függvények. Alsó és felső burkoló. A burkolófüggvények Borel-mérhetősége. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele.

19. Előjeles mértékek variációi

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív

20. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. Minden előjeles előáll, mint a totális variócója szerinti integrál.

21. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség.

22. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói.

23. Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Műveletek.

24. A maximális operátor tétele

A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges.

25. Borel-mértékek differenciálása

Lebesgue-pont. Lokálisan integrálható függvénynek majdnem pontja Legesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. A mértékek differenciálásnak fő tétele. Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0.

26. A sűrűségi tétel

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Az alsó és felső sűrűség megegyezik az alsó és felső szimmetrikus deriválttal. Sűrűségi pont. Sűrűségi tétel.

27. Abszolút folytonos függvények

Abszolút folytonos függvény. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és a folytonosság kapcsolata. Monoton növő függvény abszolút folytonosságának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel és Radon–Nikodym deriválttal.

28. Szinguláris függvények

Szinguláris függvény. Monoton növő függvény szingularitásának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel. Lebesgue-felbontás. Minden monoton függvény m.m. differenciálható. Fubini-tétel monoton függvények összegének tagonkénti differenciálásáról. Newton–Leibniz formula.

29. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata.

30. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra.

31. L_p-terek

L_p-normák. Konjugált kitevők, Hölder-, Cauchy–Schwarz és Minkowski-egyenlőtlenség. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben $p < \infty$ esetén sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinátájú tégalapon racionális konstans függvények. Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$.

32. Riesz–Fischer tétel

Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.)

33. Mértékben való konvergencia

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség.

34. L_2-terek, ortogonális függvénysorok

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Az $L_2([a,b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. (Petruska II, 24. fej.)

35. L_1-függvények konvolúciója

L_1-beli függvények konvolúciója. Műveletek. L_1 mint kommutatív Banach-algebra.

36. L_1-függvények Fourier-transzformáltja

Fourier-transzformált. L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. A Fourier-transzformált homomorfizmus az $(L_1, *)$ és $(L_\infty, \cdot)$ Banach-algebrák között. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja.

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

[Halász] Halász Gábor: Fourier integrál. Egyetemi jegyzet, ELTE, 2005.

[Friedmann] H. Friedman: A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. Illinois J. Math., 24 (3): 390–395, MR 0573474