Tájékoztató és részletes tételjegyzék az Analízis IV. vizsgához (sillabusz)[1]

2022/2023, II. félév

A vizsga részei:

- Felkészülés (legalább 40 perc)
- A tételjegyzék két tételének vázlatos kidolgozása és szóbeli előadása.
- Válaszadás a vizsgáztató szóbeli kérdéseire.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

Az elégséges osztályzathoz legalább ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket (jegyzet nélkül).

Egyszerre 4-5 vizsgázó készülhet a teremben.

Részletes tételjegyzék

1. Green-tétel

A vonalintegrál általánosításai. Síkvektorok keresztszorzata, irányított szöge. Egyszerű zárt görbék, Jordan-görbetétel (bizonyítás nélkül). Egyszerű zárt görbe irányítása. Green-tétel (bizonyítás normáltartományra, és a bizonyítás vázlata az általános esetben). [LTS2, 200–204. o.]

2. Integráltételek síkban

Külső normális egyszerű zárt görbe mentén. Newton-Leibniz formula síkban. Mese a kertünkben felörő talajvíz forráserősségéről és -sűrűségéről. Divergencia (magasabb dimenzióban is). Gauss-Osztrogradszkij tétel 2-dimenzióban. Mese vektormező örvényerősségéről és -sűrűségéről. Rotáció 2-dimenzióban. Stokes-tétel 2-dimenzióban.

3. Integráltételek három dimenzióban

Folytonsan differenciálható paraméteres felületek. Területelem, normálvektor, felszín. Felszín szerinti és felületi integrálok. Függvénygrafikon mint paraméteres felület normálvektora. A Green-tétel térbeli megfelelője. 3-dimenziós Newton-Leibniz formula. Zárt felületeken a területvektor integrálja 0. Gauss-Osztrogradszkij tétel. Rotáció 3-dimenzióban. Stokes-tétel. Kelvin-Stokes tétel (bizonyítás nélkül). Kapcsolat a Maxwell-egyenletek differenciális és integrális alakjai között. (Magukat a Maxwell-egyenleteket nem kell megtanulni.) [LTS2, 211–221. o.]

4. Halmazstruktúrák, Borel-halmazok

Nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, σ-additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$-n. Banach–Tarski paradoxon (bizonyítás nélkül); nem létezik pozitív, eltolásinvariáns, normált, additív függvény $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$-ön. Halmazrendszerek: halmazgyűrű, algebra, σ-gyűrű, σ-algebra, modulus, félgyűrű. Félgyűrűben véges és megszámlálható unió átalakítása diszjunkt halmazok uniójára. Generált struktúrák. Megszorítás. Borel-halmazok topologikus terekben. [Petruska, 51–52, 55, 81–82. o.]

[1] *Ez csak tervezet, a félév végéig még változhat.*

5. Halmazfüggvények, mértékek

Kiterjesztett számegyenes. Halmazfüggvények. Monoton, additív σ-additív, szubadditív, σ-szubadditív halmazfüggvények. Mérték. Előjeles és komplex mértékek. Mértéktér. Számosságmérték, Dirac-mérték. A mértékek additivitása, monotonitása és folytonossága.

6. Lebesgue-mérték

A Lebesgue-féle külső mérték, kétféle ekvivalens definíció. Monotonitás. Kompakt halmazok és Jordan-mérhető halmazok külső mértéke. Egybevágóság és hasonlóság hatása. σ-szubadditivitás. A belső mérték lehetséges definíciója. Mérhetőség. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, és ezen $\overline{\lambda}$ mérték (bizonyítás nélkül). A Jordan-mérhető halmazok Lebesgue-mérhetők is (bizonyítás nélkül). Nullmértékű halmazok. $\mathbb{R}^p$-ben. $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$. Minden pozitív külső mértékű halmaz tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

7. Relatív külső mértékek

Relatív külső mértékből származó külső mérték. Nemnegatív halmazfüggvényhez asszociált külső mérték. A mérhető halmazok. A mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak. A Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak.

8. Teljes mértékterek

Külső mérték szerint nullmértékű halmaz. A nullmértékű halmazok mérhetőek. Teljes mértéktér. Teljes mértéktér megszorítása teljes. A Lebesgue-mérték teljes. Minden mértéktér tejessé tehető.

9. A mértékkiterjesztési tétel

Félgyűrűn additív relatív külső mérték kiterjeszthető a generált gyűrűre. Példa arra, hogy a kiterjesztés nem mindig egyértelmű. σ-végesség. Mértékkiterjesztési tétel. A kiterjesztés egyértelműsége σ-véges térben. Minden Jordan-mérhető és minden Borel-halmaz Lebesgue-mérhető. A $\mathcal{L}_p =$, illetve a $\mathcal{B}$ algebrán a Lebesgue-mérték az egyetlen pozitív, normált, eltolásnvariáns mérték.

10. Lebesgue-Stieltjes mértékek egy dimenzióban

Lokálisan véges 1-dimenziós Borel-mérték. Eloszlásfüggvény. Az eloszlásfüggvény balról folytonos. A különböző típusú intervallumok mértékének kifejezése az eloszlásfüggvénnyel. Additív intervallumfüggvények. Megengedett végpontok. Egydimenziós Lebesgue-Stieltjes mértékek. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

11. Lebesgue-Stieltjes mértékek véges dimenzióban.

Kiterjesztés véges dimenzióban. Eloszlásfüggvény. Addititív téglafüggvény. Folytonossági hipersík. A folytonossági hipersíkok halmaza megszámlálható. Lebesgue-Stieltjes mérték véges dimenzióban. Minden lokálisan véges Borel-mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel-mérhető halmazokra.

12. Lokálisan véges Borel-mértékek regularitása

Mérhető halmaz közelítése nyílt, zárt, kompakt, G_δ és F_σ halmazokkal. Mérhető halmazok "távolsága". Minden véges mértékű, Lebesgue–Stieltjes mérhető halmazhoz van tetszőlegesen közeli halmaz, ami véges sok (racionális koordinátájú) téglalap uniója.

13. Mérhető függvények

Mérhető függvények, a mérhetőség különböző ekvivalens feltételei félegyenesek ősképeivel. Mérhetőség és műveletek (min, max, alapműveletek, határérték, kompozíció), megszámlálható sok mérhető függvény pontonkénti szuprémuma, infimuma, liminfje, limszupja, a konvergenciahalmaz mérhetősége. Luzin tétele.

14. Nemnegatív függvények integrálja

$0 \cdot \infty = 0$. Egyszerű függvények. Egyszerű függvény integrálja. Nemnegatív mérhető függvény integrálja. Műveletek.

15. Nemnegatív függvénysorozatok integrálja

Monoton konvergencia tétel. A MKT. nem igaz csökkenő sorozatra. Összeg integrálja. Beppo Levi tétele. Végtelen táblázat összege mint a BLT speciális esete. Fatou-lemma. Példák, amikor a Fatou-lemmában nincs egyenlőség, illetve limsuppal egyik irányban sem igaz. Rögzített mérhető, nemnegatív függvény integrálja mérték.

16. Valós és komplex értékű függvények integrálja

Előjeles és komplex függvények integrálja. Műveletek. Rögzített függvény integrálja, mint előjeles/-komplex mérték.

17. Függvénysorozatok integrálja

Fatou-Lebesgue tétel. Korlátos kovergencia tétel. Dominált konvergencia tétel. Az integrál kiterjesztése majdnem mérhető függvényekre. Ha $\sum \int |f_n|$ konvergens, akkor $f_n \to 0$ m.m.

18. A Riemann-integrál létezésének feltételei

Alulról és felülről folytonos függvények. Alsó és felső burkoló. A burkolófüggvények Borel-mérhetősége. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle ekvivalens feltétele.

19. Előjeles mértékek variációi

Előjeles és komplex mértékek. Előjeles mérték nem veheti fel mindkét végtelent. Majoráns mérték. Pozitív, negatív és totális variáció. A totális variáció majorálja a pozitív és a negatív

20. Előjeles mértékek felbontási tételei

Előjeles mérték szerint létezik maximális és minimális mértékű halmaz. Hahn-felbontás. Jordan-felbontás. $\tau = \pi + \nu$. Minden előjeles előáll, mint a totális variciója szerinti integrál.

21. Lebesgue-felbontás

Mérték tartója. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek. Adott mértéknél nem nagyobb maximális szinguláris mérték. Lebesgue-felbontás. Egyértelműség.

22. Radon–Nikodym derivált

Radon–Nikodym derivált. Radon–Nikodym tétel. Helyettesítéses integrálás. A totális variáció szerinti RN derivált. Előjeles és komplex mérték szerinti integrál definíciói.

23. Differenciálbázisok; előjeles mérték deriváltja

Differenciálbázis. Alsó és felső deriváltak. Műveletek.

24. A maximális operátor tétele

A maximális operátor, az alsó és a felső derivált mérhetősége. A maximális operátor tétele. Lokálisan véges mérték alsó és felső deriváltja m.m. véges.

25. Borel-mértékek differenciálása

Lebesgue-pont. Lokálisan integrálható függvénynek majdnem pontja Legesgue-pont. Abszolút folytonos mérték m.m. differenciálható, és a deriváltja megegyezik a Radon–Nikodym deriválttal. A mértékek differenciálásnak fő tétele. Lokálisan véges Borel-mérték akkor és csak akkor szinguláris, ha a deriváltja m.m. 0.

26. A sűrűségi tétel

Mérhető burok. Alsó és felső sűrűség. Az alsó és felső sűrűség megegyezik az alsó és felső szimmetrikus deriválttal. Sűrűségi pont. Sűrűségi tétel.

27. Abszolút folytonos függvények

Abszolút folytonos függvény. A Lipschitz-tulajdonság, az abszolút folytonosság és a folytonosság kapcsolata. Monoton növő függvény abszolút folytonosságának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel és Radon–Nikodym deriválttal.

28. Szinguláris függvények

Szinguláris függvény. Monoton növő függvény szingularitásának átfogalmazása a megváltozásból származó mértékkel. Lebesgue-felbontás. Minden monoton függvény m.m. differenciálható. Fubini-tétel monoton függvények összegének tagonkénti differenciálásáról. Newton–Leibniz formula.

29. Véges sok mértéktér szorzata

σ-additivitás két mértéktér direkt szorzatán. Két mértéktér szorzata. Fubini-tétel (bizonyítás nélkül). Véges sok mértéktér szorzata.

30. Végtelen sok mértéktér szorzata

Akárhány valószínűségi mértéktér szorzata. Bizonyítás a σ-szubadditivitásra.

31. L_p-terek

L_p-normák. Konjugált kitevők, Hölder-, Cauchy–Schwarz és Minkowski-egyenlőtlenség. Valós és komplex ℓ_p és L_p terek. Sűrű alterek L_p-terekben (egyszerű, szép (véges sok, téglán konstans), kompakt tartójú folytonos függvények alterei). $L_p(\mathbb{R}^n)$-ben $p < \infty$ esetén sűrű halmazt alkotnak a véges sok, racionális koordinátájú tégalapon racionális konstans függvények. Szeparabilitás. Példa arra, hogy $L_\infty(\mathbb{R})$ nem szeparábilis. Példák arra, hogy $L_p \not\subset L_q$.

32. Riesz–Fischer tétel

Teljesség, Riesz-Fischer-tétel. Banach-tér. (Petruska II, 24. fej.)

33. Mértékben való konvergencia

Mértékben való konvergencia. Metrizálhatóság. Kapcsolat a mértékben való, az L_p-beli és a pontonkénti konvergencia között. Teljesség.

34. L_2-terek, ortogonális függvénysorok

Skaláris szorzás. Az L_2 és ℓ_2 Hilbert-terek. A Legendre- és a trigonometrikus polinomok rendszerének teljessége. Az $L_2([a, b])$ izomorfiája az ℓ_2 térrel. (Petruska II, 24. fej.)

35. L_1-függvények konvolúciója

L_1-beli függvények konvolúciója. Műveletek. L_1 mint kommutatív Banach-algebra.

36. L_1-függvények Fourier-transzformáltja

Fourier-transzformált. L_1-függvények Fourier-transzformáltja. Konvolúció Fourier-transzformáltja a Fourier-transzformáltak szorzata. A Fourier-transzformált homomorfizmus az $(L_1, *)$ és $(L_\infty, \cdot)$ Banach-algebrák között. Inverz transzformált (bizonyítás nélkül). Véges Borel-mértékek Fourier-transzformáltja.

Hivatkozások

[LTS2] Laczkovich Miklós – T.Sós Vera: Analízis II. (ELTE jegyzet, Nemzeti Tankönyvkiadó)

[Petruska] Petruska György: Analízis II. Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1988.

[Halász] Halász Gábor: Fourier integrál. Egyetemi jegyzet, ELTE, 2005.

[Friedmann] H. Friedman: A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. Illinois J. Math., 24 (3): 390–395, MR 0573474