Valós analízis gyakorlat, 2006. szeptember 25.

1. Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

2. Készítsünk testet a valós együtthatós, racionális tört függvények (azaz, polinomok hányadosai) halmazából. Rendezhető-e ez a test? Teljesül-e az Arkhimédészi és a Cantor-axióma?

3. Egy H halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall x \in H\ \exists r > 0\ (x-r, x+r) \subset H$. Melyik halmaz nyílt az alábbiak közül:

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad ?$$

4. Mutassuk meg, hogy az $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 > 2\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 < 2\}$ halmazok nyíltak.

5. Egy H halmazt nevezzünk összefüggőnek, ha tetszőleges A, B diszjunt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ és általában minden intervallum összefüggő.

6. Bizonyítsuk be a valós számok következő tulajdonságait egymásból:
a) Arkhimédészi és Cantor-axióma;
b) Legkisebb felső korlát tétele;
c) Összefüggőség.

7. Bizonyítsuk be mindhárom fenti tulajdonságból, hogy $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \wedge x^2 = 2)$.

8. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

9. Legyen $a, b, c, x, y, z > 0$ és tegyük fel, hogy az a, b, c és x, yz számhármasok azonosan vagy ellentétesen vannak rendezve. Bizonyítsuk be, hogy

$$a(x-y)(x-z) + b(y-x)(y-z) + c(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Házi feladatok

10. Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok intervallum uniójaként.

11. Igazoljuk, hogy akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt.

12. Igazoljuk, hogy véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

13. Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű.

14. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1985)

15. Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.
Bizonyítsuk be, hogy
a) Az irracionális számok halmaza G_δ.
b) A racionális számok halmaza nem G_δ.

16. Bizonyítsuk be az intervallumok összefüggőségéből a Bolzano-Weierstrass tételt.

17. Bizonyítsuk be az intervallumok összefüggőségéből Borel fedési tételét.