Valós analízis gyakorlat, 2006. szeptember 27.

1. Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű. (Baire kategóriatétel)

2. Bizonyítsuk be a valós számok következő tulajdonságait egymásból:
a) Arkhimédészi és Cantor-axióma;
b) Legkisebb felső korlát tétele;
c) Összefüggőség.

3. Bizonyítsuk be mindhárom fenti tulajdonságból, hogy $\exists x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \wedge x^2 = 2)$.

4. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

5. Nevezzünk egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt folytonosnak, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt. Bizonyítsuk be háromféleképpen Bolzano tételét: Ha f folytonos, $a < b$, továbbá $f(a)$ és $f(b)$ közül az egyik negatív, a másik pozitív, akkor létezik olyan $c \in (a, b)$, amire $f(c) = 0$.

6. Bizonyítsuk be Weierstrass tételét: folytonos függvénynek minden korlátos, zárt, nem üres intervallumon létezik minimuma és maximuma (azaz a felvett értékei között van legkisebb és legnagyobb; avagy, felveszi a szuprémumát és az infimumát.

Házi feladatok

7. Mutassuk meg, hogy a véges testeket nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

8. Mutassuk meg, hogy ha egy test rendezhető, akkor 0-karakterisztikájú (azaz $1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ sohasem lehet 0.)

9. Igazoljuk, hogy ha egy korlátos zárt intervallumot lefedünk akárhány nyílt halmazzal, azok közül véges sok is lefedi. (Az ilyen tulajdonságú halmazokat kompaktnak nevezzük; az állítás azt mondja, hogy minden korlátos zárt intervallum kompakt.)

10. Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.
Bizonyítsuk be, hogy
a) Az irracionális számok halmaza G_δ.
b) A racionális számok halmaza nem G_δ.

11. Igazoljuk, hogy akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt.

12. Igazoljuk, hogy véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

13. Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok intervallum uniójaként.