Valós analízis gyakorlat, 2006. november 6.

1. $\lim \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + n^{100}} = ?$

2. Igaz-e, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ divergens?

3. Igaz-e, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n b_n)$ divergens?

4. Igazoljuk, hogy ha $\frac{a_n - 1}{a_n + 1} \to 0$, akkor $a_n \to 1$.

5. Legyen $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Igazoljuk, hogy a sorozat monoton. és korlátos. Mi lehet a határértéke?

6. Legyen $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + \frac{1}{a_n}}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 1$.

7. Legyen $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots$ végtelenhez taró sorozatok egy sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan (b_n) sorozat, aminek nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $(a_n^{(k)})$ nagyságrendje.

Házi feladatok

8. Legyen $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$. $\lim a_n = ?$

9. Egy rendezett testben minden monoton sorozat konvergens. Igazoljuk, hogy a testben teljesül a Cantor- és az Arkhimédészi axióma.

10. Legyen $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{1}{a_n^3}}{2}$. Igazoljuk, hogy $a_n \to 1$.

11. Tegyük fel, hogy

$$(a_n^{(1)}) \prec (a_n^{(2)}) \prec \ldots \prec (b_n^{(2)}) \prec (b_n^{(1)}).$$

(Ezek végtelen hez tartó sorozatok.) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (c_n), amire tetszőleges k esetén $(a_n^{(k)}) \prec (c_n^{(k)}) \prec (b_n^{(k)})$.