Valós analízis gyakorlat, 2006. november 27.

1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ -x & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Hol folytonos a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazokra megszorítva? Hol van határértéke a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazokra megszorítva?

2. Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire tetszőleges $a > 0$ esetén $\lim f(n \cdot a) = 0$, de a $\lim\limits_{\infty} f$ határérték nem létezik.

3. Mik az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazok izolált, illetve torlódási pontjai?

4. Igazoljuk, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont.

5. Egy halmazt nevezzünk zártnak, ha minden torlódási pontja eleme. Igazoljuk, hogy az üres halmaz, a teljes $\mathbb{R}$, minden zárt intervallum és minden zárt félegyenes zárt.

6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ tetszőleges részhalmazának megszámlálható sok izolált pontja van.

7. Nevezzünk egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt perfektnek, ha zárt és nincs izolált pontja. Igazoljuk, hogy minden zárt halmaz felbontható egy megszámlálható és egy perfekt halmaz uniójára.

Házi feladatok

8. Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire tetszőleges $a, b > 0$ esetén $\lim f(n \cdot a + b) = 0$, de a $\lim\limits_{\infty} f$ határérték nem létezik.

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ és $x_n \to a$, $x_n \neq a$ sorozat, amire $f(x_n) \to f(a)$.

10. Igazoljuk, hogy egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha a komplementere nyílt.

11. Igazoljuk, hogy minden nem üres perfekt halmaz kontinuum számosságú.