Valós analízis gyakorlat, 2007. március 9.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} < \sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

és

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra

$$\sin x = \lim \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{és} \qquad \cos x = \lim \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

4. Függvényvizsgáljuk az $\sqrt[x]{x}$ és az $\dfrac{e^x - 1}{1 - x^2}$ függvényeket.

5. Mutassunk példát olyan, folytonosan differenciálható függvényre, aminek a 0-ban szigorú lokális minimuma van, és a derivált a 0 bármely jobb és baloldali környezetében felvesz negatív és pozitív értékeket is.

6. Mi a c-edik hatvány közép határértéke, ha $c \to 0$, $c \to \infty$, illetve $c \to -\infty$?

7. Igazoljuk, hogy ha $0 \leq x, y \leq 1$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

8. Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin\sqrt{xy}$ vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$?

Házi feladatok

9. Függvényvizsgáljuk az $x - \operatorname{arc\,tg} x$ és az $\dfrac{x^2 - 1}{e^{-x} - 1}$ függvényeket.

10. Igazoljuk, hogy $|x| < 1$ esetén

$$\log(1+x) = \lim \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} \right).$$

11. Mutassunk példát olyan, akárhányszor differenciálható f függvényre, amire $x \neq 0$ estén $f(x) > 0$ és $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$.

12. Igazoljuk, hogy ha $x, y, z > 1$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, akkor

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

13. Igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ és $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, akkor

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1.$$