Valós analízis gyakorlat, 2007. március 30.

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = ?$$

2. Igazoljuk integrálással, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \sim \frac{2}{3}n^3.$$

3. Igazoljuk, hogy ha f integrálható $[0,1]$-ben, akkor

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(k/n) \to 0.$$

4. Igazoljuk, hogy ha $c>0$ és $f:[0,1]\to[c,\infty)$ integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n)\cdot f(2/n)\cdot\ldots\cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1]\to(0,\infty)$ függvény esetén?

5. Legyen tetszőleges f folytonos függvényre $I_0 f(x) = f$, $I_1 f(x) = \int_0^x f$. Az I_0 és az I_1 olyan ,,operátorok", amik folytonos függvényhez folytonos függvényt rendelnek. Definiáljuk továbbá az $I_2, I_3, \ldots$ operátorokat az $I_n f = I_1 I_{n-1} f$ rekurzióval.

(a) Igazold, hogy $I_n I_k = I_{n+k}$.

(b) Keress olyan φ_n függvényeket, amikre $I_n f(x) = \int_0^x f\cdot\varphi_n$.

Házi feladatok

6. Igazoljuk integrálással, hogy $\alpha > -1$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

7. Tegyük fel, hogy f korlátos $[0,1]$-ben és

$$\frac{f(1/n)+f(2/n)+\ldots+f(n/n)}{n} \to A.$$

Következik-e ebből, hogy f integrálható és $\int_0^1 f = A$?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $c>0$ és $f:[0,1]\to(c,\infty)$ integrálható, akkor

$$\left(\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}\right)^{-} 1 \le e^{\int_0^1 \log f} \le \int_0^1 f.$$

9. Igazoljuk, hogy ha $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konvex, akkor

$$\int_a^b f(g(x))dx \le f\left(\int_a^b g\right).$$

10. Egy alkalmass $\varphi_{1/2}$ függvényre legyen $I_{1/2}f(x) = \int_0^x f\cdot\varphi_{1/2}$. Keress olyan $\varphi_{1/2}$-et, amire $I_{1/2}I_{1/2} = I_1$.

11. Mennyi legyen $(\frac{1}{2})!$?

12. Mennyi az n-dimenziós, r sugarú gömb térfogata?