Valós analízis gyakorlat, 2007. április 16.

1. Legyen

$$F(x) = \int_0^x e^{t^3} \cos t \, \mathrm{d}t, \quad \text{és} \quad G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^3} \cos t \, \mathrm{d}t.$$

$F'(x) =?$ $G'(x) =?$

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x \quad \int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x \quad \int \log^2(x) \, \mathrm{d}x \quad \int \operatorname{arc\ sin} x \, \mathrm{d}x \quad \int \operatorname{ar\,cth} x \, \mathrm{d}x \quad \int \cos^3(2x+3) \, \mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, \mathrm{d}x \quad \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x; \quad \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, \mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \operatorname{arc\ tg} x \, \mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \sqrt{x^3 + x^2} \, \mathrm{d}x; \quad \int e^{ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x$$

3. Legyen $\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$. Igazoljuk, hogy $\operatorname{li} x \sim \frac{x}{\log x}$ ha $x \to \infty$.

4. Számítsd ki az r sugarú, n-dimenziós gömb térfogatát parciális integrálással.

5. Legyen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f-nek van primitív függvénye, de f^2-nek nincs.

6. Legyen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = \frac{1}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy f Darboux, de nincs primitív függvénye.

7. Számítsd ki (helyettesítés nélkül!) a következő integrálokat:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \, \mathrm{d}x \quad \int \sqrt{1-x^2} \quad \int \sqrt{1+x^2} \quad \int \sqrt{x^2-1}$$

Házi feladatok

8. Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\log x}}{x} \, \mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \operatorname{arc\ tg} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \log(1+x^2) \, \mathrm{d}x; \quad \int \operatorname{ctg}(2-3x) \, \mathrm{d}x \quad \int e^x \cdot \cos(\sqrt{2}x) \cdot \sin(\sqrt{3}x) \cdot \, \mathrm{d}x$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha f szigorúan monoton és differenciálható az I intervallumban, $\varphi = f^{-1}$ és $\int f = F + c$, akkor

$$\int \varphi(y) \, \mathrm{d}y = y\phi(y) - F(\phi(y)) + c.$$

10. Legyen $\alpha > 1$ (vagy $\alpha > 0$), és tetszőleges f folytonos függvényre

$$I_\alpha f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt,$$

ahol a $\Gamma(\alpha)$ számot még nem tudjuk.

Azt szeretnénk, hogy

$$\lim_{x \to \infty} \frac{I_\alpha e^x}{e^x} = 1$$

teljesüljön. Mennyi legyen $\Gamma(\alpha)$?