Valós analízis gyakorlat, 2007. május 7.

1.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ?$$

2. Igazoljuk, hogy ha $f \geq 0$, akkor az $\int_\alpha^\beta f$ improprius integrál biztosan létezik. (Lehet végtelen is.)

3. Igazoljuk, hogy ha $f \geq 0$ és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf\limits_\infty f = 0$.

4. (a) Igazoljuk, hogy ha $0 < a < b$, akkor

$$\left|\int_a^b \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{a}.$$

(b) Ellenőrizzük, hogy az $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ improprius integrálra teljesül a Cauchy-kritérium.

5. Igazoljuk, hogy ha f differenciálható és $0 < f < -f'$, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

6. Milyen c valós számokra konvergens az

$$\int_5^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \log x \cdot (\log\log x)^c}$$

improprius integrál?

7. Legyen f folytonos, $F(x) = \int_0^x f$ korlátos, g pdig monoton fogyó folytonos függvény, amire $\lim\limits_\infty g = 0$. Igazoljuk, hogy az $\int_0^\infty fg$ improprius integrál konvergens.