Valós analízis ZH, 2007. május 14.

1.

$$\int \sqrt{3^x+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

2.

$$\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + 2} = ?$$

3.

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{ar\ cth} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

4. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minden korlátos intervallumon Lipschitz és g Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor $f(g(x))$ is Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátosak, akkor

$$\underline{\int_a^b}(f+g) \le \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b}(f+g).$$

6. Milyen c valós számokra igaz, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, $f \ge 0$ és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor

$$\liminf_{x\to\infty}(x^c f(x)) = 0?$$

(Emlékeztetőül, $\liminf\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\inf\limits_{y\in(x,\infty)} g(y)\right) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\inf\limits_{y\in(x,\infty)} g(y)\right)$.)

7. Igazoljuk, hogy ha $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ differenciálható, $1 < c < 2$ és $f'(x) \le -f^c(x)$ minden elég nagy x-re, akkor $\int_1^\infty f$ konvergens.

Valós analízis ZH, 2007. május 14.
Megoldásvázlatok

1. $t=\sqrt{3^x-1}$ helyettesítéssel $x=\frac{1}{\log 3}\log(t^2+1)$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{\log 3}\cdot\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$ és

$$\int\sqrt{3^x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\log 3}\int t\cdot\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{2}{\log 3}\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2}{\log 3}\big(t-\operatorname{arc\,tg}t\big)+C=\frac{2}{\log 3}\big(\sqrt{3^x-1}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3^x-1}\big)+C.$$

2. Az integrandus 2π szerint periodikus, és két perióduson kell integrálnunk. A $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazzuk a $(-\pi,\pi)$ intervallumon.

$$\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+2}=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2}=$$

$$=4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+3}=2\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=2\sqrt{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=2\sqrt{2}\pi.$$

3.

$$\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{ar\,cth}x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)'\cdot\operatorname{ar\,cth}x\,\mathrm{d}x=\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\operatorname{ar\,cth}x\right]_1^{\infty}-\int_1^{\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[\frac{x-1}{2x}\log\frac{x+1}{x-1}\right]_1^{\infty}+\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=0+\left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^{\infty}=\log 2.$$

4. Ha g Riemann-integrálható, akkor korlátos, és az értékkészletén f Lipschitz valamilyen K Lipschitz-konstanssal. Ezért tetszőleges felosztáson $f(g(x))$ oszcillációs összege legfeljebb K-szorosa g oszcillációs összegének. Ha g oszcillációs összege kisebb, mint ε/K, akkor $f(g(x))$ oszcillációs összege kisebb, mint ε.

5. Legyen $I\subset[a,b]$ egy tetszőleges intervallum, $\varepsilon>0$ és $u,v\in I$ olyan számok, amikre $f(u)<\inf\limits_I f+\varepsilon$ és $g(v)>\sup\limits_I g-\varepsilon$. Ekkor

$$\inf_{x\in I}(f(x)+g(x))\le f(u)+g(u)<\left(\inf_{x\in I}f(x)+\varepsilon\right)+\sup_{x\in I}g(x)$$

és

$$\sup_{x\in I}(f(x)+g(x))\ge f(v)+g(v)>\inf_{x\in I}f(x)+\left(\sup_{x\in I}g(x)-\varepsilon\right),$$

vagyis

$$\inf_I(f+g)-\varepsilon<\inf_I f+\sup_I g<\sup_I(f+g)+\varepsilon.$$

Ez minden $\varepsilon>0$-ra igaz, tehát

$$\inf_I(f+g)\le\inf_I f+\sup_I g\le\sup_I(f+g).$$

Ezt tetszőleges F felosztás részintervallumaira alkalmazva,

$$s_F(f+g)\le s_F(f)+S_F(g)\le S_F(f_g).$$

A felosztás finomságával 0-hoz tartva az állítást kapjuk.

6. Válasz: $c\le 1$. Ha $c\le 1$ és $\liminf\limits_{x\to\infty}x^cf(x)=m>0$, akkor elég nagy x-re $f(x)>\frac{m/2}{x^c}$, és $\int^{\infty}\frac{m/2}{x^c}\,\mathrm{d}x$ divergens, ezért f sem lehet konvergens. Ha tehát $c\le 1$ és $\int^{\infty}f$ konvergens, akkor $\liminf\limits_{x\to\infty}x^cf(x)=0$.

Ha $c>1$, akkor legyen $f(x)=1/x^c$. Ekkor az integrál konvergens, mégis $\liminf\limits_{x\to\infty}x^cf(x)=1$.

7. A feltételt átrendezve

$$\left(f^{-(c-1)}\right)'=-(c-1)f^{-c}f'\ge(c-1).$$

Legyen $a=f^{-(c-1)}(1)$. A Lagrange-középértéktételből következik, hogy $x>1$ esetén

$$f^{-(c-1)}(x)=a+\frac{f^{-(c-1)}(x)-f^{-(c-1)}(1)}{x-1}\cdot(x-1)\ge a+(c-1)(x-1),$$

$$f(x)\le\frac{1}{((c-1)(x-1)+a)^{1/(c-1)}}.$$

Mivel $\frac{1}{c-1}>1$, a jobboldal integrálja konvergens.