Valós analízis gyakorlat, 2007. szeptember 17.

1. Konstruáljunk olyan függvénysort, ami egyenletesen konvergens és abszolút konvergens is, de nem egyenletesen abszolút konvergens.

2. (a) Legyen $p_0(x) = 0$ és $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \dfrac{x^2 - p_n^2(x)}{2}$. Igazold, hogy a $p_n(x)$ polinomok sorozata a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletesen tart az $|x|$ függvényhez.

(b) Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként lineáris függvény, akkor létezik polinomoknak egy olyan sorozata, ami egyenletesen konvergál f-hez.

3 (Weierstrass első approximációs tétele). Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan p polinom, amire $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.
(Avagy, a polinomok altere sűrű $C[a, b]$-ben.)

4. Igazoljuk, hogy ha a folytonos $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló (f_n) sorozat egyenletesen konvergens az $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ halmazon, akkor egyenletesen konvergens.

5. Igaz-e a Bolzano-Weierstrass tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy folytonos függvények bármely, egyenletesen korlátos sorozatából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat?

6. Igazoljuk, hogy ha az (f_n) függvénysorozat a H halmaz minden megszámlálható részén egyenletesen konvergens, akkor H-n is egyenletesen konvergens.

Házi feladatok

7. Bizonyítsd be, hogy ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens a H halmazon, akkor a $g_n = \max(f_1, \ldots, f_n)$ sorozat is egyenletesen konvergens.

8 (Weierstrass második approximációs tétele). Bizonyítsd be, hogy tetszőleges, 2π szerint periodikus f folytonos függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus polinom, amire $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

9. Igaz-e a Weierstrass-tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy ha $H \subset C[a, b]$ nem üres, korlátos, zárt halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény („funkcionál"), akkor f-nek van maximuma?

10. Igaz-e, hogy $C[a, b]$ összefüggő, azaz nem bomlik fel két nem üres, diszjunkt nyílt halmaz uniójára?

11. Igaz-e a Baire kategóriatétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy $C[a, b]$ nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként?