Valós analízis gyakorlat, 2007. szeptember 20.

1. Bizonyítsuk be, hogy a ζ-fügvény akárhányszor differenciálható az $(1, \infty)$ intervallumban.

2. Legyen $c > 0$. Milyen $I \subset [0, 2\pi]$ intervallumokon egyenletesen konvergensek a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^c} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^c}$$

sorok?

3. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n x)}{2^n}$$

sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, az összegfüggvénye folytonos, de egyetlen pontban sem differenciálható.

4. Létezik-e olyan, nemnegatív függvényekből álló, egyenletesen konvergens függvénysor, amire nem alkalmazható a Weierstrass-kritérium?

5. Adjunk meg olyan $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amikre tetszőleges $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez létezik a $\sum f_n$ sornak olyan zárójelezése, ami egyenletesen tart g-hez.

Házi feladatok

6. Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ függvény akárhányszor differenciálható a $(0, \infty)$ intervallumban.

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

ahol $\Lambda(n)$ a Mangoldt-szimbólum:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ha } n = p^\alpha \\ 0 & \text{ha } p \text{ nem prímhatvány} \end{cases}$$

(Segítség: $\frac{f'}{f} = (\log f)'$)

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a H halmazon, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sor is egyenletesen konvergens.