Valós analízis gyakorlat, 2007. szeptember 24.

1. Számítsd ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát.

$$\sum n^{99}x^n \qquad \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \qquad \sum n!x^{n^2}$$

2. Írd fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\dfrac{1}{x^2}$ a 3 körül;
(b) $\log x$ az 5 körül;
(c) $\sin x$ a $\dfrac{\pi}{3}$ körül;
(d) $\log(x^2-1)$ a 2 körül.

Milyen intervallumokban konvergensek a sorok? Milyen intervallumokban állítják elő a függvényeket?

3. Fejtsd hatványsorba az arc sin függvényt a 0 körül.

4.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} = ?$$

5. Konstruálj olyan, akárhányszor differenciálható függvényt, aminek 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens, a $[-1,1]$ intervallumban előállítja a függvényt, de máshol nem.

6. Legyen $c_0 = 1$ és $c_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$. (Ezeket hívják Catalan-számoknak.) Definiáljuk a $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ „generátorfüggvényt”.

(a) Bizonyítsd be, hogy a G-t definiáló hatványsor konvergens a 0 egy környezetében.
(b) Igazold, hogy a konvergenciaintervallum belsejében $G(x) = xG^2(x) + 1$.
(c) Számítsd ki és fejtsd hatványsorba G-t, és számítsd ki c_n-et.

Házi feladatok

7. Írjuk fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\operatorname{ar\,sh} x^2$ a 0 körül;
(b) $\operatorname{ar\,cth} x$ a 2 körül.

Milyen intervallumokban konvergensek a sorok? Milyen intervallumokban állítják elő a függvényeket?

8. Legyen p_n az n szám olyan partícióinak száma, amiben a tagok különbözők. (Megengedjük az egytagú, sőt az üres összeget is. Pl. $p_0 = 1$ és $p_6 = 4$, mert $6 = 5+1 = 4+2 = 3+2+1$.) A $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ generátorfüggvény segítségével keress felső becslést p_n-re.

9.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+2}\right) = ?$$

10. Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R és $|d - x_0| < R$. Mutasd meg, hogy a függvény a d pont körül is hatványsorba fejthető, és a hatványsor legalább $R - |d - x_0|$ sugarú intervallumban előállítja f-et.