Valós analízis gyakorlat, 2007. október 1.

1. Definiáljuk a következő metrikákat $\mathbb{R}^p$-ben:

$$d_\alpha(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^\alpha\right)^{1/\alpha} \quad (1 \le \alpha < \infty); \qquad d_\infty(x,y) = \max_{1\le i\le p} |x_i - y_i|.$$

(a) Igazoljuk, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^p$ esetén

$$\lim_{\alpha\to\infty} d_\alpha(x,y) = d_\infty(x,y).$$

(b) Mutassuk meg, hogy

$$\forall \alpha, \beta \in [1,\infty) \cup \{\infty\}\ \exists c_1, c_2 > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^p\ c_1 d_\alpha(x,y) < d_\beta(x,y) < c_2 d_\alpha(x,y).$$

(c) Bizonyítsuk be, hogy ha valamilyen $\alpha \in [1,\infty)\cup\{\infty\}$ esetén a d_α metrika szerint az (x_n) pontsorozat az a ponthoz konvergál, akkor mindegyik d_α metrika szerint az a-hoz konvergál.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az (x_n) sorozat minden részsorozatának létezik a-hoz tartó részsorozata, akkor $x_n \to a$.

3. Mi az alábbi halmazok belseje, külseje és határa?

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0,\ x + y < 1\big\};$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 1/n,\ |y| < \frac{1}{n}\right\};$$

4. Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A, B részhalmazaira

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B;$$

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Igaz-e, hogy

$$\big(\partial(A \cup B)\big) \cup \big(\partial(A \cap B)\big) = \partial A \cup \partial B?$$

5. Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A, B részhalmazaira

$$\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A; \quad \operatorname{int}\operatorname{ext} A = \operatorname{ext} A; \quad \partial\partial A \subset \partial A.$$

6. Két hegymászó az $y = f(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény és $f(0) = f(1) = 1$. Az egyik hegymászó a $(0,0)$, a másik az $(1,0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?

(Avagy: léteznek-e olyan $g, h : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $g(1) = h(1)$ és minden $x \in [0,1]$-re $f(g(x)) = f(h(x))$?

Házi feladatok

7. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha A egy metrikus tér tetszőleges részhalmaza, akkor $\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$ és $\partial(\operatorname{ext} A) \subset \partial A$.

(b) Igaz-e, hogy $\partial(\operatorname{int} A) = \partial(\operatorname{ext} A)$?

8. Igazoljuk, hogy ha az $(a_n) \subset \mathbb{R}^p$ pontsorozatra $\sum |a_n| < \infty$, akkor $\sum a_n$ konvergens.

9. Létezik-e olyan $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amire ∂A, $\partial\partial A$, $\partial\partial\partial A$, $\ldots$ mind különböző?