Valós analízis gyakorlat, 2007. október 4.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben minden halmaznak zárt a határa.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben a nyílt és a zárt halmazok számossága megegyezik.

3. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$ nyílt és zárt halmazainak számossága is kontinuum.

4. Kompakt-e az üres halmaz?

5. Igazoljuk, hogy ha K egy kompakt halmaz egy metrikus térben, akkor K minden zárt részhalmaza is kompakt.

6. (a) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel, akkor a tér teljes.
(b) Mutassunk példát olyan metrikus térre, ami teljes, de nem teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel.

7. Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben minden korlátos, zárt halmaz kompakt, akkor a tér teljes.

8. Az $\mathbb{R}^p$ tér egy részhalmaza „G_δ”, ha megszámlálható sok nyílt halmaz metszete. A H halmazrendszer „lánc”, ha bármelyik két eleme közül az egyik részhalmaza a másiknak. Igaz-e, hogy tetszőleges, G_δ halmazokból álló lánc elemeinek metszete is G_δ?

Házi feladatok

9. Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$ korlátos, zárt és nem üres, akkor az

$$\big\{|x| : \ x \in K\big\}$$

halmaznak van legnagyobb és legkisebb eleme.

10. Igazoljuk, hogy ha K egy metrikus tér olyan részhalmaza, hogy K minden, nyílt gömbökkel történő lefedéséből kiválasztható véges fedés, akkor K kompakt.

11. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben teljesül a Baire kategóriatétel.

12. Mutassuk meg, hogy $C[a, b]$ zárt egységgömbje nem kompakt, noha korlátos és zárt.