Valós analízis gyakorlat, 2007. október 11.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható és $\forall x \in \mathbb{R}^p$ $D_1(x) = \ldots = D_p(x) = 0$, akkor f konstans.

2. Határozzuk meg $x^3 + y^2 - xy$ maximumát a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten.

3. Differenciálhatók-e a következő függvények az origóban?

$$\sqrt{x^2+y^2}; \qquad \sqrt{x^3+y^4}; \qquad f(x) = \frac{xy}{|x|+|y|},\ f(0,0) = 0$$

4. (a) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ és $g_1, \ldots, g_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor a

$$h(x) = f\big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_p(x)\big)$$

függvény is differenciálható és

$$h' = \sum_{i=1}^{p} D_i f \cdot g_i'.$$

(b) Vezessük le ebből az eredményből a szorzat deriváltjára vonatkozó szabályt.

5. Bizonyítsuk be Heine tételét a Bolzano-Weierstrass tételből.

Házi feladatok

6. Mennyi $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ legkisebb értéke az $x, y > 0$ halmazon?

7. Milyen $a, b > 0$ valós számokra differenciálható az $|x|^a|y|^b$ függvény az origóban?

8. Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényre, ami mindenhol differenciálható, de a parciális deriváltjai nem folytonosak az orgóban.