Valós analízis gyakorlat, 2007. november 8.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5; \qquad x^3y^2(2 - x - y)$$

2. Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+q}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$ és $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható az (a, b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy egy, az a pont egy környezetében értlemezett, $\mathbb{R}^q$-ba képező φ differenciálható függvény megoldása az $f(x, \varphi(x)) = 0$ egyenletnek. Igazoljuk, hogy

$$f'_a(b) \circ \varphi'(a) = -(f^b)'(a).$$

3. Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x, y, z)$ az

$$(2 + x)u^3 + (1 + y)u - (3 + z) = 0$$

polinom valós gyöke. $u'(0, 0, 0) =?$

4. Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+1}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} H$ és $f : H \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az (a, b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy $D_{p+1}f(a, b) \neq 0$. Igazoljuk, hogy az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(\varphi(a) = b)$ egyenlettel megadott φ implicit függvény kétszer differenciálható az a pontban, és írjuk fel a második deriváltját.

Házi feladatok

5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

6. Legyen $|x_1 - 10| < 1$, $|x_2 - 20| < 1$, $|x_3 - 30| < 1$ esetén $u = (u_1, u_2)$ az

$$u_1 + u_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 10, \quad u_1u_2 = \frac{x_1x_2x_3}{10}$$

egyenletrendszernek a $(30, 20)$ ponthoz közelebbi megoldása. $u'(10, 20, 30) =?$

7. Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x, y, z)$ az

$$(2 + x)u^3 + (1 + y)u - (3 + z) = 0$$

polinom valós gyöke. $u''(0, 0, 0) =?$