Valós analízis gyakorlat, 2008. február 11.

1. Legyen $P = \{(u,v) \in [0,1]^2 : u^2+v^2 \le 1\}$, $g(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, $F = g(P)$ és $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Számítsuk ki a következő integrálokat.

$$\int_F \overrightarrow{\mathrm{d}S}; \quad \int_F \left|\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right|; \quad \int_F \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle; \quad \int_F f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S}.$$

2. Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $g : [0,1] \to G$ egyszerű, zárt, rektifikálható, pozitív irányítású görbe, $A \subset G$ a g belseje és $f : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható. Bizonyítsd be, hogy

$$\int_A (D_x f \times D_y f)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{2}\int_{f\circ g} x \times \mathrm{d}x.$$

3. Legyen $B = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\big\}$ és $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$\int_{\partial B} \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = ?$$

4. Legyen $P \subset G \subset \mathbb{R}^2$, ahol G nyílt halmaz, P pedig Jordan-mérhető és zárt. Legyen továbbá $H \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $\varphi : G \to H$ folytonosan differenciálható és injektív, továbbá $Q = \varphi(P)$.

Igazoljuk, hogy tetszőleges $F : Q \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható felületre és $f : g(Q) \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre

$$\int_F f \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right| = \int_{F\circ\varphi} f \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{d}S}\right|.$$

5. Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $T \subset G$ zárt háromszöglemez, $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható, és tegyük fel, hogy f parciális deriváltjai integrálhatók T-n. A Goursat-lemma módszerével bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a,b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_T (a\cdot D_1 + b\cdot D_2) f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial T} f(x,y)\cdot(-b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y).$$

6. Legyen F folytonosan differenciálható felület a térben, amit a g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe határol úgy, hogy a görbe és a felület irányítása a jobbkézszabálynak megfelelő, azaz a határgörbe ősképe a paramétertartományban pozitív irányítású.

Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_F \left\langle \operatorname{rot} f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = \int_g \langle f, \mathrm{d}x \rangle\,.$$

Házi feladatok

7. Legyen $P \subset G \subset \mathbb{R}^2$, ahol G nyílt halmaz, P pedig Jordan-mérhető és zárt. Legyen továbbá $H \subset \mathbb{R}^2$ nyílt, $\varphi : G \to H$ folytonosan differenciálható ésinjektív, továbbá $Q = \varphi(D)$.

Igazoljuk, hogy tetszőleges $F : Q \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható felületre és $f : g(Q) \to \mathbb{R}^3$ folytonos függvényre

$$\int_F \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = \int_{F\circ\varphi} \left\langle f, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle.$$

8. Igazoljuk, hogy a Gauss-Osztrogradszkij és a Stokes-tétel akkor is teljesül (mondjuk tetraéderre, majd poliéderekre), ha a vektormező differenciálható, és a koordinátafüggvényeinek a parciális deriváltjai integrálhatók.

9. Keressünk a 6. feladatnak megfelelő integráltételt a divergencia felületi vagy felszíni integráljára.