

Valós analízis gyakorlat, 2008. február 18.

- Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az \mathcal{A} halmazrendszer által generált gyűrűben, akkor benne van az \mathcal{A} egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűben is.
- (a) Milyen gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?
(b) Milyen σ -gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?
(c) Hány elem (mekkora számosságú halmaz) generálja a Borel-halmazok σ -gyűrűjét?
- Legyen \mathcal{A} és \mathcal{B} σ -gyűrű. Milyen halmazokból áll az $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ által generált σ -gyűrű?
- Legyen \mathcal{T} az $[a, b) \times [c, d)$ alakú, félig nyílt téglalapok rendszere.
(a) Igazoljuk, hogy \mathcal{T} félgűrű.
(b) Mi a \mathcal{T} által generált gyűrű?
(c) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amire $f([a, b) \times [c, d)) = g(b, d) - g(a, d) - g(b, c) + g(a, b)$.
(d) Mit jelentsen az, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény „korlátos változású”?
- Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens sor, (q_n) a racionális számok egy felsorolása, és tetszőleges $X \in P(\mathbb{R})$ -re $\mu(X) = \sum_{q_n \in X} a_n$. Mi a μ függvény Jordan-felbontása? Mi a totális variációja?
- Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz F_σ és minden zárt halmaz G_δ .
- Bizonyítsuk be, hogy az F_σ , illetve a G_δ , tulajdonságú halmazok rendszerei zártak a véges metszetre és a véges unióra.
- Legyen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos minden n -re. Mutassuk meg, hogy az $\{x : f_n(x) \text{ konvergens}\}$ halmaz $F_{\sigma\delta}$.
- Milyen kicsi lehet egy végtelen σ -gyűrű számossága?

Házi feladatok

- Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az \mathcal{A} halmazrendszer által generált σ -gyűrűben, akkor benne van az \mathcal{A} egy alkalmas megszámlálható részrendszere által generált σ -gyűrűben is.
- Milyen kicsi lehet egy végtelen gyűrű számossága?
- Igazoljuk, hogy egy komplex hatványsor konvergenciahalmaza a síknak $F_{\sigma\delta}$ típusú részhalmaza.
- Igazoljuk, hogy $F_{\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n) \subset G_{\delta\sigma\delta\sigma}(\mathbb{R}^n)$.
- Jelöljük $A_n(x)$ -szel az $x = 0, a_1 a_2 \dots$ tizedestörtben az első n jegy közötti 7-esek számát. Bizonyítsuk be, hogy $\{x : \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)/n = 1/10\}$ Borel. Igaz-e, hogy $F_{\sigma\delta}$ vagy $G_{\delta\sigma}$?
- Bizonyítsuk be, hogy az $F_{\sigma\delta}$, illetve a $G_{\delta\sigma}$ tulajdonságú halmazok rendszerei zártak a véges metszetre és a véges unióra.
- Hány Borel-halmaz van \mathbb{R}^n -ben?