**Valós analízis előadások (mat. BSC emelt szint), 2008. ősz**

**1-2. előadás, szeptember 8.**

Elmondtam, hogy kik az eldőadók, mi a tankönyv és kik a szerzői, mik a tegeződés-magázódás szabályai.

Megállapodtunk abban, hogy a nem túl magas létszámra tekintettel klasszikus szóbeli vizsga lesz (beugró feladat + 2 tétel).

Kihirdettem a ZH időpontokat, és mindenkinek ajánlottam, hogy járjon gyakorlatra.

Meséltem arról, hogy mi az az analízis, és hogy a differenciálkalkulust régen hogy képzelték el. Feladtam házi feladatnak, hogy olvassák el a történeti bevezetést (könyv 7–14. oldal).

Megvoltak a logikai alapfogalmak (15–18). A bizonyítási módszerek közül (19–21) volt az indirekt bizonyítás (a példák közül csak az, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális), és megbeszéltük, hogy mi az a teljes indukció.

**3. előadás, szeptember 12.**

Az indukciót bemutató könyvbeli példák (21–24) közül csak a Bernoulli-, az AM-GM és a HM-GM egyenlőtlenség volt. Az AM-GM egyenlőtlenséget a duplázós majd lefelé lépegető indukcióval bizonyítottuk.

Megvoltak a halmazok (26–29)

Beszéltem arról, hogy már a halmazokkal is bajok vannak, ha nem szabályozzuk, hogy hogyan lehet új halmazokat készíteni. (Pl. egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei halmazt alkotnak, halmaznak operáció szerinti képe is halmaz, egy hatvány részhalmazai halmazt alkotnak, és létezik végtelen halmaz.)

**4-5. előadás, szeptember 15.**

Egy kicsit meséltem azokról a fajta konstruktív felépítésekről, amikor minden objektum halmaz. Ennek részeként megbeszéltük a rendezett pár tulajdonságait, és felírtam a Kuratowski-párt, és definiáltuk két halmaz Descartes-szorzatát és a kétváltozós relációt mint a Descartes-szorzat részhalmazát. Megbeszéltuk, hogy az $\in$ és $\subset$ kétváltozos tulajdonságok ilyen értelemben nem relációk.

Megvoltak a függvények és sorozatok (27–29). Definiáltam az ősképet is.

Rátértünk a valós számok axiómáira. Megvoltak a test- és a rendezési axiómák és a két függelékben leírt következményeik (32–35; 57–59). A könyvön felül bebizonyítottuk, hogy a 0 és az 1 egyértelmű, és $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \wedge b - 0)$.

Az abszolút értékre már nem maradt idő.

**6. előadás, szeptember 19.**

Definiáltuk az abszolút értéket (36), ami múltkorról maradt.

Lement az Arkhimédészi és a Cantor-axióma (36–41). A 2.6. tételben az általánosabb állítást bizonyítottuk, a végét a

$$v_n^k - u_n^k = v_n^k \left(1 - \left(1 - \frac{v_n - u_n}{v_n}\right)^k\right) \leq v_n^k \left(1 - \left(1 - k\frac{v_n - u_n}{v_n}\right)\right) = kv_n^{k-1}(v_n - u_n) \leq kv_1^{k-1}(v_n - u_n)$$

becslésből hoztuk ki.

**7–8. előadás, szeptember 24.**

Megvoltak a végtelen tizedestörtek (42–47) és a korlátos halmazok (48–52).

Definiáltuk az üres halmaz szuprémumát és infimumát is.

A 49. oldal 4. sora helyesen:

$$(A \text{ véges } \underline{\text{és nem üres}}) \Rightarrow (\max A \text{ létezik}) \Rightarrow (A \text{ felülről korlátos})$$

**9–10. előadás, október 1.**

Elmondtam a *Hogyan fogjunk oroszlánt?* (`http://www.komal.hu/cikkek/kg/oroszlan/oroszlan.h.shtml`) c. cikkből a kresztáblás mókát, és a legkisebb felső korláttal is bebizonyítottuk, hogy $\forall k \in \mathbb{N}^+ \ \forall a \geq 0 \ \exists! b \geq 0 \ a = b^k$. Definiáltuk a $k$-adik gyököt.

Megvolt a hatványozás elejétől a végéig (53–56).

**11. előadás, október 3.**

Lényegében a könyv 60–71. oldalai voltak.

Elkezdtük a végtelen számsorozatokat. Definiáltuk a sorozatok alulról és felülről való korlátosságát, a véges és a végtelen határértékeket, bebizonyítottuk a határértékek és a korlátosság kapcsolatát és a határérték egyértelműségét. Felrajzoltuk Venn-diagrammal (halmaz-krumplikkal) a különböző eseteket.

**12–13. előadás, október 8.**

A most következő fejezetet más sorrendben mondtam/mondom el a limsup és liminf kedvéért.

Megvolt a "Néhány konkrét sorozat határértéke" (72–73). Utána elondtam a műveleteket (79–85). Ezután jöttek az alaptulajdonságok (74–76).

Definiáltuk a torlódási pontot. A monoton sorozatokból elmondtam a 90–91. oldalakat. A $\nearrow$ és $\searrow$ jelölés nem volt.

Defináltuk számsorozat limsup-ját és liminf-jét. Megbeszéltük, hogy mi a kapcsolat a inf sup és lim sup, illetve sup inf és lim inf között.

**14. előadás, október 10.**

Bebizonyítottuk, hogy ha $b > \limsup a_n$, akkor (véges sok kivétellel, VSK) $a_n < b$, illetve ha $b < \limsup a_n$, akkor végtelen sokszor $a_n > b$. Továbbá a lim inf-re vonatkozó analóg állításokat.

Bebizonyítottuk, hogy léteznek $\limsup a_n$-hez és $\liminf a_n$-hez tartó részsorozatok, de nem létezik nagyobbhoz, ill. kisebbhez tartó részsorozat. Továbbá $\liminf \leq \limsup$.

Bebizonyítottuk, hogy

$$\begin{aligned}
a_n \to \infty &\iff \liminf a_n = \infty, \\
a_n \to -\infty &\iff \limsup a_n = -\infty, \\
a_n \to a &\iff \liminf a_n = \limsup a_n = a, \\
\text{VSK} \quad a_n \leq b_n &\implies \liminf a_n \leq \liminf b_n \quad \text{és} \quad \limsup a_n \leq \limsup b_n, \\
\limsup a_n < \liminf b_n &\implies \text{VSK} \quad a_n < b_n,
\end{aligned}$$

Megbeszéltük a megfelelő ellenéldákat is.

Kimondtuk a (rendőr/csendőr)-(elv/szabályt) a következő alakokban:

$$\begin{aligned}
(\text{VSK} \quad a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{és} \quad \liminf a_n = \limsup c_n = a) &\implies b_n \to a \\
(\text{VSK} \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to a, \quad \text{és} \quad c_n \to a) &\implies b_n \to a \\
(\text{VSK} \quad |a_n| \leq b_n \quad \text{és} \quad b_n \to 0) &\implies a_n \to 0
\end{aligned}$$

Kimondtuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\text{VSK} \quad a_n \leq b_n \quad \text{és} \quad \liminf a_n = \infty) &\implies b_n \to \infty, \\
(\text{VSK} \quad a_n \leq b_n \quad \text{és} \quad \liminf b_n = -\infty) &\implies a_n \to -\infty
\end{aligned}$$

Elmondtam, hogy ezeket honvéd-elvnek lehetne nevezni.

(A "VSK"-t többször elfelejttem odatenni.)

**15–16. előadás, október 15.**

Megvoltak a nagyságrendek (86–89). Definiáltuk azt is, ha két végtelenhez tartó sorozat nagyságrendje ugyanaz ($0 < c_1 < \frac{a_n}{b_n} < c_2$).

Pótoltam a korábban kimaradt $\nearrow$ és $\searrow$ jelöléseket.

Elmeséltem a *Miért természetes az e?* (`http://www.komal.hu/cikkek/kg/e/e.h.shtml`) c. cikkből a heurisztikát, bebizonyítottuk, hogy $(1+\frac{1}{n})^n$ és $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ monoton, és definiáltuk az $e$ számot (91–94. oldal).

Kimondtuk és kétféleképpen bizonyítottuk a Bolzano-Weierstrass tételt (97). Első bizonyítás: vannak olyan részsorozatok, amik a véges liminfhez, iletve a limsuphoz tartanak. Második: létezik monoton részsorozat. (Megbeszéltük, hogy a csúcselemek sorozata éppen a limsuphoz tart, ezért a két bizonyítás nem teljesen különöző.)

Megvolt a Cauchy-kritérium (99–100). A bizonyítás a visszafelé irányban:

$$\forall\varepsilon\exists N\ a_N - \varepsilon < a_n < a_N + \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon\exists N\ a_N - \varepsilon \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le a_N + \varepsilon,$$

amiből $\liminf a_n$ és $\limsup a_n$ véges, továbbá $\forall\varepsilon\ 0 \le \limsup a_n - \liminf a_n \le 2\varepsilon$.

Szóban, röviden vázoltam a tankönyvi bizonyítást.

Vázoltam, hogy hogyan lehet a racionális számok Cauchy-sorozatainak ekvivalencia-osztályaiként megkonstruálni a valós számokat (100). Ezzel befejeztük a sorozatok témáját.

Mivel az előadott felépítés lényegesen eltér a könyvtől, házi feladatnak feladtam, hogy olvassák el a teljes 5. fejezet.

**17. előadás, október 17.**

Elkezdtük a megszámlálható halmazokat. Megnéztünk néhány példát ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_k]$, algebrai számok), definiáltuk a transzcendens számokat. Volt mindkét bizonyítás arra, hogy $[0,1)$ nem megszámlálható. Definiáltam az injektív, szürjektív és bijektív függvényeket, az $A \sim B$, $|A| = |B|$, $|A| \le |B|$ és $|A| < |B|$ jelöléseket és azt hogy $|\mathbb{R}|$ neve kontinuum.

Kimondtam a Cantor-Schröder-Bernstein tételt. A bizonyítás menete: legyen $f : A \to B$ és $g : B \to A$ két injekció, és legyen $C_0 = \emptyset$, $C_{n+1} = A \setminus g\big(B \setminus f(C_n)\big)$, továbbá $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Ezek után $f$ megszorítása $C$-re és $g$ megszorítása $D = B \setminus f(C)$-re együtt előállít egy bijekciót $A$ és $B$ között. A bizonyítás vége a következő alőadásra maradt, de házi feladatnak feladtam, hogy a bizonyítás milyen bijekciót konstruál $A = (0,1)$ és $B = (0,1]$ között, ha $f(x) = x$ és $g(x) = x/2$.

**18-19. előadás, október 22.**

Befejeztük a Cantor-Schröder-Bernstein tételt. Megvoltak a könyvben (102–106) szereplő tételek: végtelen és megszámlálható halmaz uniója, irracionális számok, transzcendens számok, intervallumok, valamint $P(\mathbb{N})$ számossága. (Az utóbbit gyakorlaton már megcsináltuk, most csak kimondtam.) Kimondtam, hogy bármely két halmaz számossága összehasonlítható, $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$ ha $A$ vagy $B$ végtelen, és $|A \times A| = |A|$ ha $A$ végtelen. Bebizonyítottuk, hogy bármely $H$ halmazra $|H| < |P(H)|$.

Rátértünk a függvényekre, Lényegében a könyv 108–109. és 114–120. oldalai voltak. Azt, hogy $x^2$ és $1/x$ szigorúan konvex, csak kimondtam. Ugyanígy, a konvexitásra vonatkozó feltételek ekvivalenciáját sem bizonyítottuk.

**20–21. előadás, november 5.**

Megvolt a folytonosság (124–127). Definiáltuk a $B(a,r)$ jelölést, a féloldali környezeteket ($B(a \pm 0, r)$) is. Megvolt a véges határérték véges helyen (128–133). Elkezdtűk a 15-féle határérték definíciót.

**22. előadás, november 7.**

Befejeztük a határérték különböző definícióit. (133–136).

Definiáltam függvény limesz szuprémumát és limesz inferiorát. Bebizonyítottuk a következőket:

– $\liminf \leq \limsup$.

– Ha $b > \limsup_\alpha f$, akkor létezik $\alpha$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x \in \dot{U}\ f(x) < b$.

– Ha $b < \limsup_\alpha f$, akkor $\alpha$-nak minden $\dot{U}$ pontozott környezetében $\exists x \in \dot{U}\ f(x) > b$.

– $\lim = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \infty$.

– $\lim = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup = -\infty$.

– $\lim = b$ akkor és csak akkor, ha $\liminf = \limsup = b$.

– Akkor és csak akkor létezik lim, ha $\liminf = \limsup$.

– A hatérérték egyértelmű.

**23–24. előadás, november 12.**

Definiáltuk halmaz izolált és torlódási pontjait, valamint függvény folytonosságát és határértékét valamilyen halmazra szorítkozva (142–143). Definiáltuk függvény limesz szuperiorát és inferiorát halmazra szorítkozva, és az előző előadáson szerepelt tételeket kimondtuk így is.

Bebizonyítottuk, hogy ha valamilyen $\dot{U}$ pontozott környezet és $A$ metszetén $f \leq g$, akkor $\limsup_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,A} g$ és $\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf_{\alpha,A} g$, továbbá ha $\limsup_{\alpha,A} f < \liminf_{\alpha,A} g$, akkor egy pontozott környezet és $A$ közös részében $f < g$. Kimondtuk a rendőr- és honvéd-elv függvényekre vonatkozó megfelelő változatait. (Lehetséges, hogy Hofi nyomán nem is a honvéd-, hanem a csősz-elv lenne a helyes.)

Megvolt a függvényekre vonatkozó Cauchy-kritérium.

Nekifutottunk az átviteli elvnek, és bebizonyítottuk a következő két lemmát:

L1. Tetszőleges olyan $(x_n)$ sorozatra, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$ és $x_n \to \alpha$, teljesül, hogy

$$\liminf_{\alpha,A} f \leq \liminf f(x_n) \leq \limsup f(x_n) \leq \limsup_{\alpha,A} f.$$

L2. Létezik olyan $(x_n)$ sorozat, amire $x_n \in A$, $x_n \neq \alpha$, $x_n \to \alpha$ és $f(x_n) \to \limsup_{\alpha,A} f$.

**25. előadás, november 14.**

Megvoltak az átviteli elv különböző változatai (139–142), valamint a határérték és műveletek (146–147; 149–152). Nem mondtuk ki a 8.40. tételt, és a nagyságrendek sem voltak.

**26–27. előadás, november 19.**

Még egyszer visszatértünk a helyettesítésre, illetve új változóra való áttérésre. Megvoltak a nagyságrendek (152–153). Defniáltuk a 0-hoz tartó pozitív függvények nagyságrendjét is.

Elkezdtük a Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények c. fejezetet. Kétféleképen bizonyítottuk a Bolzano-tételt (159–160). A Weierstrass-tételt a Bolzano-Weierstrass tételből bizonyítottuk (156–158). Kimondtuk, hogy intervallum foyltonos képe intervallum, korlátos zárt intervallum folytonos képe korlátos zárt intervalum.

Kimondtam a Borel fedési tételt és elmondtam a *Hogyan fogjunk oroszlánt?* c. cikkben leírt bizonyítást.

**28. előadás, november 21.**

Befejeztük a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvényeket.

Bebizonyítottuk a Borel fedési tételt Lindelöf lemmával és Bolzano-Weierstrass tétellel is. Defniáltuk a kompaktság fogalmát. A Borel tétellel is bebizonyítottuk a Weierstrass-tételt. Ezzel már nem üres,

korlátos, zárt, illetve nem üres, kompakt halmazokon folytonos függvényekre is beláttuk, hogy van maximumuk. Házi feladatnak feladtam, hogy $\mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaza akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt. (Az egyik irány lényegében a Borel fedési tétellel megvolt.)

A Heine tételt csak a Bolzano-Weierstrass tétellel bizonyítottuk, de házi feladatnak feladtam, hogy csinálják meg Borellel is.

Megvolt a Lipschitz tulajdonság és az ellenpéldák.

**29-30. előadás, november 26.**

Megvoltak a Monotonitás és folytonosság, illetve Konvexitás és folytonosság c. fejezetek (166–176).

> *A könytől eltérően csak azokat a szakadási helyeket neveztem ugráshelynek, ahol a féloldali határértékek léteznek és végesek.* Ha ezt a definíciót használjuk, akkor például az $1/x$ függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van.

Bebizonyítottuk, hogy ha egy gyengén konvex függvény felülről korlátos, akkor konvex. Vázoltam az ellenpéldát alulról korlátos függvényre. Bebizonyítottuk továbbá, hogy ha egy konvex függvény szigorúan gyengén konvex, akkor szigorúan konvex.

**31. előadás, november 28.**

Megvolt a függvénygrafikon ívhosza (176–181) c. fejezet. Az $S(u)$ (alias arkusz koszinusz) függvényről elmondtam, hogy $0 < u < 1$ esetén

$$\sqrt{1-u^2} < S(u) \leq \frac{1}{u}\sqrt{1-u^2}.$$

A felső becslés abból jön ki, hogy a beírt töröttvonalat a $(1,0)$-beli érintőre vetítjük. Formálisan: $0 < p < q < 1$ esetén

$$\sqrt{(q-p)^2 + \left(\sqrt{1-p^2} - \sqrt{1-q^2}\right)^2} < \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} - \frac{\sqrt{1-q^2}}{q}.$$

Elmondtam, hogy geometriai meggondolásokból ez triviális, de ki is lehetne számolni.

**32–33. előadás, december 3.**

Elkezdtük az elemi függvényeket. A polinomokról szóló algebrai tulajdonságokat csak megemlítettem, mert ezek algebrából úgy is voltak és jól ismertek. Megvoltak a polinomok és racionális törtek (182–184) az exponenciális és hatványfüggvények (185–190), és a logaritmus (197–199). A hatványozás azonosságai korábban már voltak (valós kitevőre is), a logaritmus középiskolából jól ismert azonosságait csak kimondtuk.

Bebizonyítottuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget az általánosabb formájában (189), azt, hogy az $(1+1/x)^x$ és az $(1+1/x)^{x+1}$ függvények monotonok, továbbá $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+b/x)^x = e^b$ és $\lim\limits_{x\to 0}(1+bh)^{1/h} = e^b$ (190–191).

Definiáltuk a súlyozott hatványközepeket és bebizonyítottuk a súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségeket (194–196).

**34. előadás, december 5.**

Megmutattuk, hogy rögzített számok és súlyok mellett $b \to \pm\infty$ esetén $b$-edik hatványközép a legnagyobb, illetve legkisebb számhoz tart. Kimondtuk és bizonyítottuk a Hölder- és a Cauchy-Swarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenségeket (199-200). Bebizonyítottuk, hogy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ és $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h} = 1$.

Az utolsó percekben még definiáltuk a trigonometrikus függvényeket.

**35–36. előadás, december 10.**

Megvolt az Elemi függvények c. fejezet hátralevő része (203-215), beleértve az addíciós tételek bizonyítását (217) is.

Pénteken már nem lesz előadás, mert a külön időpontban írt évfolyan zéhákkal már ledolgoztuk.

Vége a félévnek. Jöhet a tavasz és a differenciálszámítás.