Valós analízis gyakorlat, 2008. szeptember 8.

Első ZH: október 15., szerda, 16–18; második ZH: december 3., szerda, 16–18.
(Cserébe valamikor az utolsó két héten el fog maradni egy előadás és egy gyakorlat.)

1. „Megnyugtatásul közlöm, hogy tévesnek bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, miszerint mégsem hazugság azt tagadni, hogy lesz olyan vizsgázó, akinek egy valós analízis tétel bizonyítását sem kell tudnia ahhoz, hogy ne bukjon meg."

2. Tagadjuk a következő állítást:

„Minden asszony életében van egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad."

3. Ha H egy számhalmaz, akkor mit jelentenek a következő állítások?
(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ x < y$; (b) $\forall x \in H\ \exists y \in \mathbb{R}\ x < y$; (c) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ x < y$.

4. Ha $H \subset \mathbb{N}$, akkor mit jelentenek a következő állítások?
(a) $(1 \in H) \wedge (\forall x \in H\ (x+1) \in H)$;
(b) $(1 \in H) \wedge (2 \in H) \wedge (\forall x \in \mathbb{N}\ (x \in H \wedge (x+1) \in H) \Rightarrow (x+2) \in H)$;
(c) $(1 \in H) \wedge ((\forall x \in \mathbb{N}\ (\forall y \in \mathbb{N}\ y < x \Rightarrow y \in H)) \Rightarrow x \in H)$;
(d) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \notin H) \Rightarrow (\exists y \in N\ (y < x \wedge y \notin H)$;

5. $A_1, A_2, \ldots$ logikai állítások. Mit mondhatunk, ha
(a) $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \Rightarrow A_{n+1}$?
(b) Ha $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \Rightarrow (A_{n+1} \wedge A_{n+2})$?
(c) Ha $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ (A_n \vee A_{n+1}) \Rightarrow A_{n+2}$?
(d) Ha $\forall n \in N\ \neg A_n \Rightarrow \exists k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ \neg A_k$?

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Házi feladatok

7. Ha minden repülni tudó állatnak van szárnya, és minden madárnak szárnya van, akkor a formális logika szabályai szerint melyik állítás igaz biztosan?

(a) Minden szárnyas állat tud repülni	(e) Több is igaz a fentiek közül
(b) Minden madár tud repülni	(f) Egyik sem igaz a fentiek közül
(c) Néhány szárnyas tud repülni	(g) Egyik sem igaz a fentiek közül
(d) Minden szárnyas állat madár	(h) Egyik sem igaz a fentiek közül

(„Az ország IQ-tesztje" nyomán)

8. Tegyük fel, hogy
(a) nem mind hullamosó, aki szereti a spenótot;
(b) minden matematikus hullamosó, vagy legalábbis nem szereti a spenótot;
(c) vagy az igaz, hogy aki nem hullamosó, az matematikus, vagy pedig az, hogy aki hullamosó, az nem matematikus.
Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem matematikus?

(KöMaL, 1975. december, F. 2001. alapján)

9. Hány olyan $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz létezik, amelyre $\forall x\ (x \in H \Longrightarrow x+1 \notin H)$?

10. Melyik állításból következik a másik?
(a) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ x < y$ (c) $\forall x \in A\ \forall y \in B\ x < y$
(b) $\exists y \in B\ \forall x \in A\ x < y$ (d) $\exists x \in A\ \exists y \in B\ x < y$

11. Legyen u_n az n-edik Fibonacci szám ($u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $\ldots$). Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot 1,6^n < u_n < 1,7^n.$$