Valós analízis gyakorlat, 2008. szeptember 15.

1. Legfeljebb mekkora lehet xy, ha $x, y \geq 0$ és a) $x + y = 10$; b) $2x + 3y = 10$?

2. Milyen nagy térfogatú hengert lehet beleírni egy egységnyi sugarú gömbbe?

3. Igaz-e, hogy

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C);$$
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C);$$
$$(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C)?$$

4. Igaz-e, hogy egy H halmaz részhalmazai a szimmetrikus differenciával és a) a metszettel; b) az unióval egységelemes gyűrűt alkotnak?

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b, x, y pozitív számokra

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

6. (Cauchy-Schwarz) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, az_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számokra

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

7. Adott a síkon néhány pont, semelyik három nincs egy egyenesen. A pontok közül minden lehetséges módon kiválasztunk néhányat úgy, hogy semelyikük sincs a többi konvex burkának belsejében. Egy ilyen H halmazra legyen $a(H)$ a H pontjainak száma, $b(H)$ pedig a H konvex burkának belsején kívülre eső további pontok száma. Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra

$$\sum_H x^{a(H)}(1-x)^{b(H)} = 1.$$

(Megengedjük a $H = \emptyset$ esetet is.)

8. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}} + \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}} + \frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} + \ldots + \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} < 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Házi feladatok

9. Mi az $x^2 - x^3$ függvény maximuma a $[0, 1]$ intervallumban?

10. Legfeljebb mekkora térfogatú henger írható az egyenes körkúpba?

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \geq -1$ és $r \geq 1$ racionális, akkor $(1+x)^r \geq 1 + rx$. Ha viszont $r \leq 1$, akkor $(1+x)^r \leq 1 + rx$.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok, $p < q$ és $p, q \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \ldots + a_n^q}{n}\right)^{1/q}.$$

13. (König-lemma) Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ nemüres, véges halmazok és tetszőleges n pozitív egészre f_n egy A_{n+1}-ből A_n-be képező függvény. Igazoljuk, hogy létyezik olyan végtelen $x_1, x_2, \ldots$ sorozat, amire tetszőleges n esetén $x_n \in A_n$ és $f_n(x_{n+1}) = x_n$.

14. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számokra tetszőleges $1 \leq k \leq n$ esetén igaz, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leq \frac{(k-1)k(k+1)}{2}.$$

Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}.$$