Valós analízis gyakorlat, 2008. szeptember 19.

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\forall a,b,c,d \quad \Big(\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{c\},\{c,d\}\big\} \quad \Leftrightarrow \quad (a=c \quad \wedge \quad b=d)\Big).$$

2. Legyen $f : A \to B$. Igaz-e, hogy
(a) $\forall X,Y \in P(A)\ f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$?
(b) $\forall X,Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$?

3. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

$$-(-a) = a; \qquad (-a)\cdot b = -(a\cdot b); \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad (b,d \neq 0).$$

4. Bizonyítsuk be, hogy rendezett testben $x^2 \geq 0$.

5. Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

6. Az $\sim \subset A \times A$ kétváltozós relációt *ekvivalenciarelációnak* nevezzük, ha a következő három tulajdonság teljesül rá:
(a) $\sim$ reflexív, azaz $\forall x \in A(x \sim x)$;
(b) $\sim$ szimmetrikus, azaz $\forall x,y \in A(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$;
(c) $\sim$ tranzitív, azaz $\forall x,y,z \in A\big((x \sim y \ \wedge\ y \sim z) \Rightarrow x \sim z\big)$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $\sim$ ekvivalenciareláció, akkor A felbontható diszjunkt részekre, „ekvivalenciaosztályokra” úgy, hogy A bármely két x,y eleme akkor és csak akkor van ugyanabban az ekvivalenciaosztályban, ha $x \sim y$.

7. A derékszögű koordinátarendszerben néhány rácspontot megmérgeztek úgy, hogy tetszőleges n-re az $x+y \leq n$ tartományban legfeljebb n mérgezett pont van. Egy bolha az origóból indulva ugrál, mindig vagy a $(0,1)$, vagy az $(1,0)$ vektorral ugrik. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan végtelen hosszú útvonal, amin elkerülheti a mérgezett pontokat.

Házi feladatok

8. Legyen $f : A \to B$. Igaz-e, hogy
(a) $\forall X,Y \in P(A)\ f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$?
(b) $\forall X,Y \in P(B)\ f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$?

9. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

$$(a-b)-c = a-(b+c); \qquad 1/(a/b) = b/a \quad (a,b,\neq 0); \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \quad (b,c,d \neq 0).$$

10. Mutasssuk meg, hogy a valós együtthatós, racionális tört függvények (azaz, polinomok hányadosai) teste rendezhető. Teljesül-e az Arkhimédészi és a Cantor-axióma?

11. Igazoljuk, hogy ha egy megszámlálható gráf minden véges része síkba rajzolható, akkor a teljes gráf is.