Valós analízis gyakorlat, 2008. szeptember 22.

1. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall x \in H\ \exists r > 0\ (x-r, x+r) \subset H$. Melyik halmaz nyílt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

2. Igazoljuk, hogy
a) akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt;
b) véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

3. Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű. (Baire kategóriatétel)

4. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

5. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\mathbb{R}$ összefüggő;
b) minden intervallum összefüggő.

6. Izomorf-e a racionális tört függvények teste a valós számok testével?

7. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, 1985)

Házi feladatok

8. Mutassuk meg, hogy az $A = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 > 2\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2 < 2\}$ halmazok nyíltak.

9. Egy H halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplentere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

10. Igazoljuk, hogy
a) akárhány zárt halmaz metszete is zárt;
b) véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

11. A H halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b\ \Big(\exists c, d\ \big(a < c < d < b\ \wedge\ H \cap (c,d) = \emptyset\big)$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű.

12. Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.
Bizonyítsuk be, hogy
a) Az irracionális számok halmaza G_δ.
b) A racionális számok halmaza nem G_δ.