Valós analízis gyakorlat, 2008. október 13.

1. Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Igazoljuk, hogy
(a) Az sorozat monoton nő;
(b) A sorozat korlátos;
(c) A sorozat határértéke csak a 2 lehet.

2. Mutass példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amikre $a_n - b_n \to 0$ és $a_n/b_n \to \infty$.

3. Mi az alábbi sorozatok limesz szuperiora és limesz inferiora? Mik a torlódási pontjaik?

$$\sqrt[n]{n}; \qquad (-1)^n + \frac{1}{n}; \qquad \{\sqrt{n}\}$$

4. (a) Bizonyítsuk be, hogy ha a_n és b_n két számsorozat úgy, hogy mindkettő alulról korlátos vagy mindkettő felülről korlátos, akkor

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}(a_n + b_n) \le \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

(b) Keressünk olyan (a_n) és (b_n) korlátos sorozatokat, amikor
(b1) egyik esetben sincs egyenlőség;
(b2–b5) pontosan az egyik egyenlőségnél áll fenn egyenlőség (4 példa).

5. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

6. Bizonyítsuk be, hogy
(a) ha $a_n \to a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor $a_n^b \to a^b$.
(b) ha $a_n \to a > 0$ és $b_n \to b$, akkor $a_n^{b_n} \to a^b$.

Házi feladatok

7. Mi legyen 0^0, ∞^0 és 0^∞?

8. Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{6}{5 - x_n}$. $\lim x_n = ?$

9. Mutass példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amikre $a_n - b_n \to \infty$ és $a_n/b_n \to 0$.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a > 0$ és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \overline{\lim}\, b_n.$$

11. Bizonyítsuk be, hogy (a) ha $a_n \to a \ge 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n}.$$

(b) ha $a_n \to a \le 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n}.$$