Valós analízis gyakorlat, 2008. december 1.

1. Mekkora az $[x]$ függvény ívhossza a $[0,2]$ intervallumban?

2. Legyen $(q_1, q_2, \ldots)$ a $(0,1)$-beli racionális számok egy sorbarendezése, valamint $f(q_n) = \frac{1}{2^n}$, $f(0) = f(1) = 0$ és $f(x) = 0$ ha x irracionális. $s(f,[0,1]) =?$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az $[a,b]$ intervallumban, akkor a grafikonja rektifikálható.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha f grafikonja rektifikálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor minden a-tól különböző pontban létezik és véges a baloldali határértéke, illetve minden b-től különböző pontban létezik és véges a jobboldali határértéke.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az f és g függvények grafikonja rektifikálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f+g$ grafikonja is reftikálható.

6. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy

$$\forall K < s(f;[a,b]) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$$

$$\Big(\big(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \max(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}) < \delta \big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} > K \Big).$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ grafikonja rektifikálható minden korlátos intervallumban, akkor f felírható egy monoton növekvő és egy monoton csökkenő függvény összegeként.

8. Létezik-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek grafikonja semmilyen nem elfajuló intervallumban nem rektifikálható?

Házi feladatok

9. Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ grafikonja rektifikálható, akkor f korlátos.

10. Igazoljuk, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor a grafikonja rektifikálható.

11. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami monoton nő, a szakadási helyeinek halmaza sűrű, és tetszőleges $a \leq b$ esetén $s(f;[a,b]) = b - a + f(b) - f(a)$?