Valós analízis ZH, 2008. október 15.

Matematika BSC 1. évfolyam, emelt szint

Mindegyik lapra írjátok rá a neveteket és a gyakorlatvezetőtök nevét.

Minden feladat 1 legfeljebb pontot ér. Részpontszám is kapható.

Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az előadáson és a gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézitek. (Pl. „Volt előadáson, hogy...")

1. Mi az $\dfrac{n}{(6/5)^n}$ sorozat $(n = 1, 2, \ldots)$ határértéke? Mutass $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz küszöbindexet!

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$2\sqrt{n} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

3. Legfeljebb mekkora lehet $a^2b^3c^4$, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + b + c = 6$?

4. (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset \mathbb{R}$ halmazokra

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

(b) Mutassunk példát olyan $A_1, A_2, A_3, \ldots \subset \mathbb{R}$ halmazokra, amelyekre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \emptyset \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \mathbb{R}.$$

5. Adott egy R rendezett test, aminek $\mathbb{Q}$ részteste. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(\forall a, b \in R) \Big((1 < a < b < 2) \Rightarrow \big((\exists q \in \mathbb{Q})\ (a < q < b) \big) \Big),$$

akkor R-ben teljesül az Arkhimédészi axióma.

6. Adott egy $(X, <)$ rendezett halmaz (egy tetszőleges halmaz, és elemei között egy $<$ kétváltozós reláció, ami trichotóm és tranzitív). Nevezzük *intervallumnak* az X következő alakú részhalmazait:

$$\begin{array}{lll}
(-\infty, a) = \{x \in X : \ x < a\}; & (a, b) = \{x \in X : \ a < x < b\}; & X; \\
(-\infty, a] = \{x \in X : \ x \leq a\}; & (a, b] = \{x \in X : \ a < x \leq b\}; & \emptyset; \\
(a, \infty) = \{x \in X : \ x > a\}; & [a, b) = \{x \in X : \ a \leq x < b\}; & \\
[a, \infty) = \{x \in X : \ x \geq a\}; & [a, b] = \{x \in X : \ a \leq x \leq b\}. &
\end{array}$$

Egy $K \subset X$ halmazt nevezzünk *konvexnek*, ha tetszőleges $a, b \in K$, $a < b$ esetén $[a, b] \subset K$. Mutassuk meg, hogy ha X minden konvex részhalmaza intervallum, akkor X minden nem üres és felülről korlátos halmazának létezik legkisebb felső korlátja.

7. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_n}{\sqrt[3]{n}} \to 1.$$