Valós analízis gyakorlat, 2010. március 16.

1. (a) Igazoljuk, hogy ha μ mérték egy σ-gyűrűn, akkor a σ-véges halmazok σ-gyűrűt alkotnak.
(b) Milyen σ-algebrát generálnak a σ-véges halmazok?

2. Legyen μ eltolás-invariáns mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain, amire $\mu\big([0,1]\big) < \infty$. Igazoljuk, hogy μ a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

3. Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$ $g(x) = \lfloor x \rfloor$ és $h(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a $\overline{\mu}_f$, $\overline{\mu}_g$, $\overline{\mu}_h$ Lebesgue-Stieltjes külső mértékeket és a mérhető halmazok rendszerét.

4. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tetszőleges $a \leq b$ esetén $\mu\big([a,b]\big) = f(b+0) - f(a-0)$. Milyen mértéket generál ez a függvény?

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges Lebesgue-mérhető H halmazhoz léteznek olyan F_σ $B \subset H$ és G_δ $K \supset H$ mérhető halmazok, amikre $\lambda(B) = \lambda(K) = \lambda(H)$.

6. Legyen H tetszőleges halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és $M \subset \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy M mérhető burka H-nak, ha M mérhető, és tetszőleges $X \supset H$ mérhető halmazra $\lambda(M \setminus X) = 0$.
Létezik-e (a)) nyílt; (b) zárt; (c) F_σ; (d) G_δ mérhető burka minden $\mathbb{R}^n$-beli halmaznak?

7. (a) Mérhető burok-e a mérhető burkok metszete?
(b) A mérhető burkok között létezik-e (eteleg több) minimális?

Házi feladatok

8. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazain minden eltolás-invariáns, totálisan σ-additív mérték a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

9. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tetszőleges $a < b$ esetén $\mu\big((a,b)\big) = f(b-0) - f(a+0)$. Milyen mértéket generál ez a függvény?

10. Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset I$-re $\overline{\mu}_f(H) = \overline{\lambda}\big(f(h)\big)$.
Mutassuk meg, hogy H akkor és csak akkor μ_f-mérhető, ha $f(H)$ Lebesgue-mérhető.