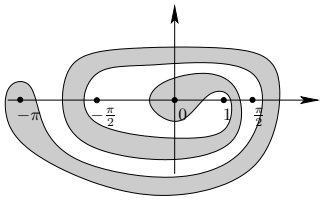
Komplex függvénytan gyakorlat, 2007. november 15.

1. (a) Igazoljuk, hogy ha egy tartományon $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, akkor $f(z) \cdot e^{-g(z)}$ állandó.

(b) Igazoljuk, hogy ha egy egyszeresen összefüggő tartományon $f(z)$ reguláris és sehol sem 0, akkor értelmezhető regulárisan a $\log f(z)$ függvény.

2. Összesen mekkora szöggel fordul el $\cos z$ értéke, amíg ezen a tartományon elsétálunk a 0-ból a $-\pi$-be?

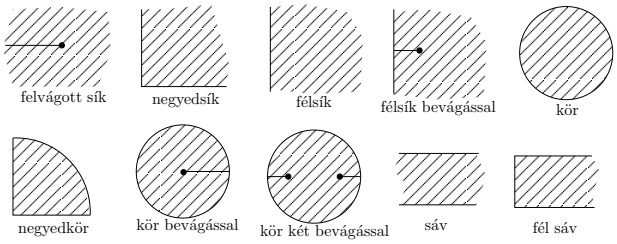


Segítség: sétáljunk vissza a tükörkép tartományon!

3. Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

4. Az f függvény reguláris az $1 < |z| < 2$ tartományon és $\limsup |f(z)| \leq 1$, ha $|z| \to 1$ vagy $|z| \to 1$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(z)$ a 2 értéket éppen annyiszor veszi fel, mint ahány pólusa van ebben a körgyűrűben.

5. Az ábrán tízféle egyszeresen összefüggő tartomány látható. Keress közöttük konform megfeleltetéseket.



6. Igazoljuk, hogy ha f reguláris az a pont egy környezetében és $f'(a) \neq 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, amire tetszőleges $0 < r < \delta$ esetén

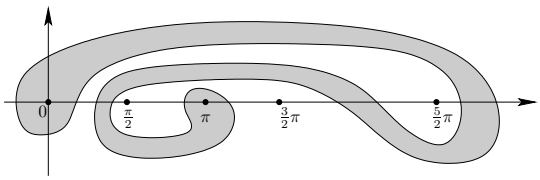
$$B\big(f(a), (1-\varepsilon)|f'(a)|r\big) \subset f\big(B(a,r)\big) \subset B\big(f(a), (1+\varepsilon)|f'(a)|r\big).$$

Bizonyítsuk be ebből is, hogy az f mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény a-beli Jacobi-determinánsa $|f'(a)|^2$.

Házi feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy egyszeresen összefüggő tartomány konform képe is egyszeresen összefüggő.

8. Az ábrán látható tartományon $\cos z \neq 0$, ezért az $f(z) = \log \cos z$ függvény regulárisan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. Mennyi $f(\pi)$?



9. Hány gyöke van a $\sin z = 2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

10. Legyen $|a| = 3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

11. Bizonyítsd be az algebra alaptételét Rouché tételéből.

12. Tegyük fel, hogy az egyszerű γ görbe a belsejével együtt a D tartományban fekszik, ahol f és g reguláris, továbbá a γ görbén $|f| > |g|$. Igazoljuk Rouché tételét az $I(u) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{(f+ug)'}{f+ug}$ paraméteres integrál vizsgálatával.

13. Igaz-e a Caratheodory tétel megfelelője olyan tartomány esetén, ami nem egyszeresen összefüggő, hanem véges sok Jordan-görbe határolja?