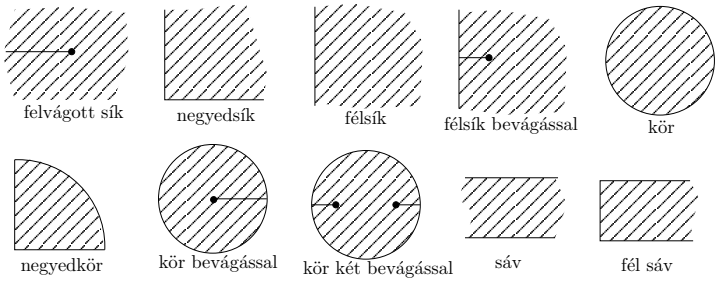
Komplex függvénytan gyakorlat, 2008. november 12.

1. Az ábrán tízféle nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány látható. Keress közöttük konform megfeleltetéseket.



2. Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány, $p \in D$ és $f : D \to D$ olyan reguláris függvény, amire $f(p) = p$. Igazoljuk, hogy $|f'(p)| \leq 1$.

3. Határozd meg az $\operatorname{Im} z > 0$ félsík összes konform automorfizmumsát! (Az összes, a félsíkot önmagára képező konform leképezést.)

4. Egy (a) lineáris tört; (b) racionális tört függvény az egységkörvonalat önmagára képezi. Hogyan helyezkedhetnek el a gyökei és a pólusai?

5. Az $f(z)$ függvény reguláris a nyílt egységkörlapon és $|f(z)| \leq 1$. A függvény gyökei $w_1, w_2, \ldots$ (lehet végelen sok is). Bizonyítsd be, hogy

$$|f(0)| \leq \prod_j |w_j|.$$

6. Bizonyítsd be, hogy egyszeresen összefüggő tartomány konform képe is egyszeresen összefüggő (azaz minden, a tartományban fekvő zárt, rektifikálható görbe indexe 0 bármely, a tartományon kívüli pontra vonatkoztatva).

7. A $g(z)$ függvény reguláris az egységkörben, $g(0) = 0$, és az egységkörben $\operatorname{Re} g(z) > -\frac{1}{2}$. Mutassuk meg, hogy

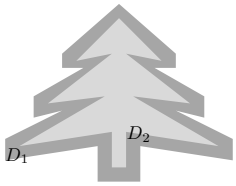
$$\left| g(z) - \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \right| < \frac{|z|}{1-|z|^2}.$$

Házi feladatok

8. Legyen $D = \{z : \ |z| < 1, \ \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\}$. Írd fel azt a φ konform leképezést, ami D-t a felső félsíkra képezi úgy, hogy $\varphi(\frac{1}{2}) = \infty$, $\varphi(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -1$ és $\varphi(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$.

9. Mik azok a $|z| < 1 + \varepsilon$ körlapon meromorf f függvények, amikre $|z| = 1$ esetén $|f(z)| = 1$?

10. Adott a komplex síkon egy K kör, rajta kívül egy p pont. Bizonyítsd be, hogy ha f olyan törtlineáris függvény, amire $f(K) = K$ és $f(p) = p$, akkor $|f'(p)| = 1$.

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = ? \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = ? \quad \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = ? \quad \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$

12. Legyen D_1 az ábrán a külső, sötétebben satírozott tartomány, D_2 pedig a külső és a belső rész együtt. Bizonyítsd be, hogy ha az f függvény reguláris D_1-en és bármely, a D_2-n reguláris g függvényre az $f \cdot g$ függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en, akkor f analitikusan folytatható D_2-re.