KFT vizsgatájékoztató és részletes tételjegyzék (sillabusz), 2024 tavasz, Analízis Major

Konzultációk:					Vizsgaidőpontok:				
máj. 26.	vas	10–12	Teams	K.G.	máj. 27.	hét	9–	D-3-306	K.G.
jún. 6.	csüt	10–12	Teams	K.G.	jún. 7.	pén	9–	D-3-306	K.G.
jún. 12.	sze	10–12	Teams	K.G.	jún. 13.	csüt	9–	D-3-306	K.G.
					jún. 14.	pén	9–	D-3-306	K.G.
jún. 20.	csüt	10–12	Teams	K.G.	jún. 21.	pén	9–	D-3-306	K.G.
júl. 1.	hét	10–12	Teams	S.I.	júl. 2.	kedd	9–	D-3-219	S.I.

Jelenléti, szóbeli vizsga lesz. Nem kell kiöltözni. Normális, kényelmes, hétköznapi ruhában gyertek.

A vizsgán a tételjegyzéket használhatjátok, a sillabuszt nem.

A vizsgatételek közül kettőt húztok (egy feketét és egy pirosat). Kb. 60 percetek lesz a tételek vázlatos kidolgozására, amit kb. 20 percben szóban elmeséltek, és válaszoltok a vizsgáztató kérdéseire.

Egyszerre legfeljebb 4–5 vizsgázó készülhet a teremben. A folyosón földön ülés helyett ebben táblázatban írjátok be, hogy ki mikor szeretne jönni:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1_yDEqymXNtW3Ou8xlVFH-cXsIu8yjaboLJbncAyXwrI/edit?usp=sharing

Az elégséges osztályzat alsó határa: pontosan ki kell tudni mondani a tananyagban szereplő tételeket és definíciókat, és ezeket meg is kell érteni. Ha valamelyik részre vagy tételre a vizsgázó tudása elégtelen, pl. valamelyik alapvető tételt vagy definíciót segítséggel sem tudja helyesen kimondani, akkor az egész vizsga értékelése elégtelen.

Ha valaki mindent tökéletesen tud, annak az osztályzata 6-os lenne, a kettő között a vizsgáztató mérlegel.

A konzultációkat on-line tartjuk az előadás Teams csoportjában, és felvesszük, hogy vissza lehessen nézni.

♣A 1. Komplex számok

Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Az $1/z$ és az $1/\overline{z}$ függvények. Határérték, folytonosság, függvénysorozatok, egyenletes konvergencia. Weierstrass M-teszt. ∞. Határérték ∞-ben. Riemann-gömb.

♣2 2. Komplex differenciálhatóság

Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Differenciálási szabályok. Lokális inverz függvény differenciálási szabálya. Cauchy—Riemann egyenletek. A $\overline{z}$ függvény sehol sem differenciálható. $\overline{f(\overline{z})}$ differenciálhatósága. Holomorf és egészfüggvények. Ha egy holomorf függvény valós vagy képzetes része konstans, vagy a derivált 0, akkor a függvény konstans.

♣3 3. Hatványsorok

Hatványsorok. Konvergenciakör. Példák véges, 0 és végtelen konvergenciasugárra. Cauchy–Hadamard tétel. A kör belsejében a sor abszolút konvergens, kisebb körökön egyenletesen abszolút konvergens. Tagonkénti differenciálhatóság. Taylor-együttható. A hatványsor egyértelműsége.

♣4 4. Az $\exp z$ és a komplex trigonometrikus függvények

Az e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ függvények. Azonosságok: $(e^z)'$, $e^{\overline{z}}$, e^{z+w}, $e^z \neq 0$. Kapcsolat e^z, $\cos z$ és $\sin z$ között. Periodicitás. Trigonometrikus azonosságok. Vízszintes és függőleges egyenesek és sávok e^z szerinti képe. A trigonometrikus függvények határtárértéke, ha $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$.

♣5 5. Komplex logaritmus és hatványozás

A logaritmus értelmezésének problémái. A logaritmus főértéke. A logaritmusfüggvények deriválása. Azonosságok. A hatványozás nehézségei. Pozitív valós alapú hatványok. Azonosságok.

♣6 6. Komplex vonalintegrál

Szakaszonként C^1 görbék. Folytonos függvény vonalintegrálja szakaszonként C^1 görbén létezik. Átírás komplex értékű Riemann-integrállal. Átparaméterezés, megfordítás, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Egyenletesen konvergens függvénysorozatok és -sorok integrálása. Helyettesítéses integrálás. Newton–Leibniz formula. Ívhossz szerinti integrál az egységkörvonalon.

♣7 7. Primitív függvény csillagszerű tartományon

A primitív függvény létezésének kapcsolata a vonalintegrál eltűnésével. Goursat-lemma. Holomorf függvény primitív függényének létezése konvex és csillagszerű tartományon. Lokális primitív függvény létezése.

♣8 8. Cauchy-alaptétel

Homotóp görbék. Holomorf függvény vonalintegrálja homotóp, szakaszonként C^1 görbéken ugyanannyi. Egyszeresen összefüggő tartomány. Cauchy-alaptétel egyszeresen összefüggő tartományra. A primitív függvény létezése egyszeresen összefüggő tartományokon. Az $1/z$ függvény vonalintegrálja. Görbeindex.

♣9 9. Cauchy-integrálformulák

Cauchy-formula körvonalon. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula. Holomorf függvény akárhányszor differenciálható, és létezik lokális primitív függvénye. Morera tétele. A $\log f(z)$ holomorf ágának létezése egyszeresen összefüggő tartományon.

♣10 10. Holomorf függvények sorozatai

Weierstrass tétele holomorf függvények lokálisan egyenletes limeszéről. Riemann-zeta függvény a $\operatorname{Re} s > 1$ félsíkon. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali–Montel tétel.

♣J 11. Hatványsorba fejtés

Együttható-formula. A Cauchy-formula, a Taylor-együttható és az együtthatóformula összehasonlítása. Hatványsorba fejtés. Analitikus függvény. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

♣Q 12. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése. Gyök multiplicitása. Unicitástétel. Végtelen rendben eltűnő függvény konstans 0. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximum-elv. Schwarz-lemma.

♣K 13. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékkészlete sűrű. Kis Picard-tétel (bizonyítás nélkül). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

♡A 14. Laurent-sorok

Motiváció: izolált szingularitások vizsgálata. Laurent-polinom, Laurent-sor. Laurent-sor konvergenciatartománya, példák. Együtthatóformula. A Laurent-sor egyértelműsége. Példa arra, hogy azonos középpontú körgyűrűkön a Laurent-sorok lehetnek különbözők. Laurent-sorba fejtés. Eljárás racionális törtfüggvény Laurent-sorba fejtésére. A $\operatorname{ctg} z$ függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja.

♡2 15. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szinularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati–Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (bizonyítás nélkül).

♡3 16. A reziduumtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduumtétel (nullhomotóp görbére). Módszerek a reziduum kiszámítására. Az $\frac{f(z)}{g(z)}$ alakú törtek reziduuma, ha g-nek egyszeres gyöke van. Példák.

♡4 17. A reziduumtétel alkalmazásai

A reziduumtétel alkalmazásai improprius integrálok kiszámítására: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$. A $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény viselkedése. $f(z)\cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ alakú függvények reziduumainak összege. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ alakú összegek kiszámítása. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ kiszámítása. Változatok a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ és a $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ függvényekkel. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ kiszámítása.

♡5 18. Argumentum-elv

Meromorf függvények. Logaritmikus derivált. Szorzat és hányados logaritmikus deriváltja. A logaritmikus derivált pólusai és reziduumai. Argumentum-elv szakaszonként C^1 határú Jordan-tartományra. Az argumentum-elv kiterjesztései függvények összegzésére, egyenletek megoldására.

♡6 19. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. A lokális inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

♡7 20. Lineáris törtfüggvények

Lineáris törtfüggvények. Reprezentáció mátrixszorzással. Három pont képe egyértelműen meghatározza a lineáris törtfüggvényt. Komplex kettősviszony. Kettősviszonytartás, körtartás, szögtartás, szimmetriatartás. Az I. síknegyed megfeleltetése a felső fékörnek lineaáris törtfüggvénnyel.

♡8 21. Az egységkörlemez konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z\pm a}{1\pm \bar{a}z}$ alakú lineáris törtfüggvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés lineáris törtfüggvény. A körlemezek és félsíkok közötti konform megfeleltetéseket egyértelműen meghatározza három határpont képe (megfelelő körüljárással), vagy egy belső és egy belső pont képe, vagy egy belső pont képe és ott a derivált argumentuma.

♡9 22. Riemann-alaptétel I.

Riemann-alaptétel (csak kimondani). Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Az egyértelműség bizonyítása. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze.

♡10 23. Riemann-alaptétel II.

Segédtételek (csak kimondani): a logaritmus és hatványfüggvények létezése, Weierstrass-tétel, Vitali–Montel tétel, Hurwitz-tétel, injektív függvények limesze. A konform megfeleltetés létezésének bizonyítása.

♡J 24. A tükrözési elv

Caratheodory tétele, kiterjesztések (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés egyenes szakaszokra és körívekre. Bizonyítás a kis Picard-tételre.

♡Q 25. Harmonikus függvények

Hő- és hullám-egyenlet. Laplace-operátor, harmonikus függvények. Laplace-egyenlet. Két-dimenzióban azonosítás komplex változós függvényekkel. Egyszeresen összefüggő tartományon egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha egy holomorf függvény valós része. Nem egyszeresen összefüggő tartományon egy függvény akkor és csak akkor harmonikus, ha lokálisan egy holomorf függvény valós része. Példák. Középérték-tulajdonság. A középérték-tulajdonság megfordítása (bizonyítás nélkül). Maximum- és minimum-elv.

♡K 26. Poisson-formula

A Poisson-formula levezetése a középrték-tulajdonságból. A Poisson-magfüggvény különböző alakjai és alaptulajdonságai. Adott harmonikus $u(z)$ függvényhez olyan holomorf függvény felírása integrál alakban, amelynek valós része u. A Poisson-formula közvetlen levezetése a Cauchy-formulából.