1. Komplex számok

Komplex számok. Komplex sík. A komplex sík geometriai transzformációi. Határérték és folytonosság. Riemann-gömb. Végtelen határérték és határérték ∞-ben.

Ismétlés

Ezeket mind tudjuk algebrából, geometriából, esetleg középiskolai versenyekről:

- A komplex számokat úgy kapjuk, hogy a valós számok algebrai testét bővítjük i-vel, ami az $x^2 = -1$ egyenlet gyöke, vagyis $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
- A z komplex szám *algebrai alakja* $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.
    - $x = \operatorname{Re} z$ a z *valós része*;
    - $y = \operatorname{Im} z$ a z *képzetes része*.
    - Alternatív jelölések: $x = \Re z$ és $y = \Im z$.
    - Figyeljük meg, hogy az i nem része a képzetes résznek; a képzetes rész is egy valós szám. Például $\operatorname{Re}(2 + 3i) = 2$, $\operatorname{Im}(2 + 3i) = 3$.
- A két valós koordináta miatt a komplex számokat a sík ($\mathbb{R}^2$) pontjaival (vektoraival) azonosítjuk: az $x+yi$ komplex szám az (x, y) pontnak (vektornak) felel meg.
- Az x, y betűket szeretjük fenntartani a valós és képzetes résznek. Ezért komplex számok jelölésére inkább más betűket fogunk használni: leggyakrabban a z-t, de előfordul w, ζ (zéta), ω (omega), s is.
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a z *abszolút értéke* vagy *hossza*; $|z|^2 = z\overline{z}$.
- Az összeadás és a kivonás ugyanaz, mint $\mathbb{R}^2$-beli (sík)vektoroknál:

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i, \quad (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i.$$

- Szorzás: a zárójeleket felbontva, és beírva, hogy $i^2 = -1$,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

- $\overline{z} = x - yi$ a z *komplex konjugáltja*.
- Osztás: ha az algebrai alakkal számolunk, akkor érdemes a nevező konjugáltjával bővíteni:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

- Ezekkel a műveletekkel a komplex számok algebrai testet alkotnak.
- $z \neq 0$ komplex szám *trigonometrikus (polárkoordinátás) alakja* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ a z *argumentuma*.

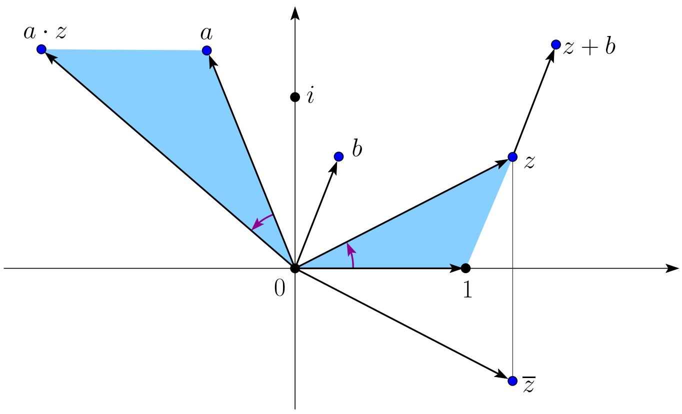
- Az argumentum csak modulo 2π egyértelmű; úgy is mondhatjuk, hogy a $(\mathbb{R},+)/2\pi\mathbb{Z}$ faktorcsoportnak eleme.

- A trigonometrikus alakkal szép a szorzás, az osztás, az egész kitevős hatványozás és a gyökvonás. Ha $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, akkor

    - $z_1 z_1 = r_2 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$, tehát az abszolút értékek összeszorzódnak és az argumentumok összeadódnak: $|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ és $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$;
    - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big)$,
      $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ és $\arg\dfrac{z_1}{z_2} \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$;
    - $\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
    - Az $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ számnak n darab n-edik gyöke van:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right)$$

Hasonlósági transzformációk



- $z \mapsto z+b$: eltolás a b vektorral

- $z \mapsto \overline{z}$: tükrözés a valós tengelyre

- $z \mapsto -z$: középpontos tükrözés a 0-ra

- $z \mapsto a\cdot z$ (valamilyen rögzített $a \neq 0$ komplex számmal): forgatva nyújtás a 0 körül; a nagyítás aránya $|a|$, a forgatás irányított szöge $\arg a$.

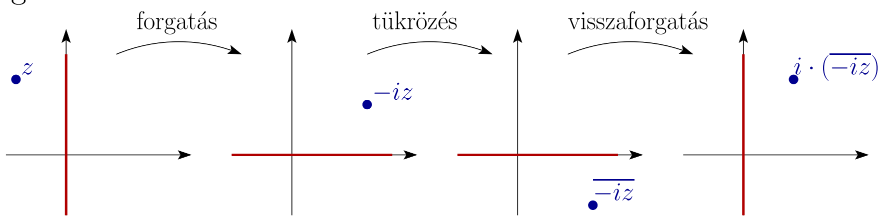
- ilyenek kombinációiként a következő függvényeket kapjuk meg:

    - $z \mapsto a\cdot z + b$ (az összes irányítástartó hasonlósági transzformáció)
    - $z \mapsto a\cdot\overline{z} + b$ (az összes irányításváltó hasonlósági transzformáció)

Példa

Írjuk fel képlettel a képzetes tengelyre való tükrözést.

1. megoldás: A képzetes tengelyt a valós tengelyre forgatjuk, tükrözünk, visszaforgatunk:



$$z \quad \mapsto \quad -i \cdot z \quad \mapsto \quad \overline{-i \cdot z} \quad \mapsto \quad i \cdot (\overline{-i \cdot z}) = -\overline{z}.$$

2. megoldás: A tengelyes tükrözés egy irányításváltó hasonlóság is, ezért a képletet $f(z) = a\overline{z} + b$ alakban keressük. Két pont képe meghatározza a, b-t.

Pl. $f(0) = 0$, $f(1) = -1$. Megoldva $a = -1$, $b = 0$, tehát $f(z) = -\overline{z}$.

Határérték és folytonosság

A távolság, pontok környezetei, nyílt és zárt halmazok, kompaktság, ponthalmazok összefüggősége, számsorozatok és számsorok konvergencája, függvények (véges pontban vett véges) határértéke, függvények folytonossága és egyenletes folytonossága, függvénysorozatok és függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája, és ezek alapvető tulajdonságai pontosan ugyanazok, mint az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkon. Ezekhez a fogalmakhoz ugyanis nincs szükség a komplex számok szorzására, csak vektorok összeadására és abszolút értékére. A többváltozós analízisben tanult definíciók, tételek és bizonyítások változtatás nélkül átírhatók komplex változós, komplex értékű függvényekre.

Definíció

- z_0 középpontú *nyílt gömb*: $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
- z_0 középpontú *zárt gömb*: $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\}$
- *egységkör*: $\mathbb{D} = B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
- *zárt egységkör*: $\overline{\mathbb{D}} = \overline{B}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$
- *egységkörvonal*: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
- a $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *nyílt*, ha minden $z_0 \in D$ hez van olyan $\delta > 0$, melyre $B(z_0, \delta) \subset D$
- a $D \subset \mathbb{C}$ halmaz *zárt*, ha komplementere nyílt.
- a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz *összefüggő*, ha
  - D bármely két pontja összeköthető D-ben töröttvonallal;
  - D nem bontható fel két nemüres, diszjunkt nyílt halmaz uniójára, vagyis tetszőleges G_1, G_2 diszjunkt nyílt halmazokra, ha $D = G_1 \cup G_2$, akkor $G_1 = \varnothing$ vagy $G_2 = \varnothing$.
- *tartomány*: nemüres, összefüggő, nyílt része $\mathbb{C}$-nek
- *(egyváltozós) komplex függvény*: $\mathbb{C}$ egy részhalmazáról képez $\mathbb{C}$-be

Egyenletes konvergencia

Szükségünk lesz a függvénysorozatok és függvénysorok egyenletes konvergenciájára. Ez a definíció pontosan ugyanaz, mint valós függvények esetében.

Érdemes kimondani a függvénysorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó *Weierstrass-kritérium*ot, ezt többször fogjuk használni komplex függvénysorokra:

Tétel (Weierstrass-kritérium, Weierstrass M-teszt)

Tegyük fel, hogy

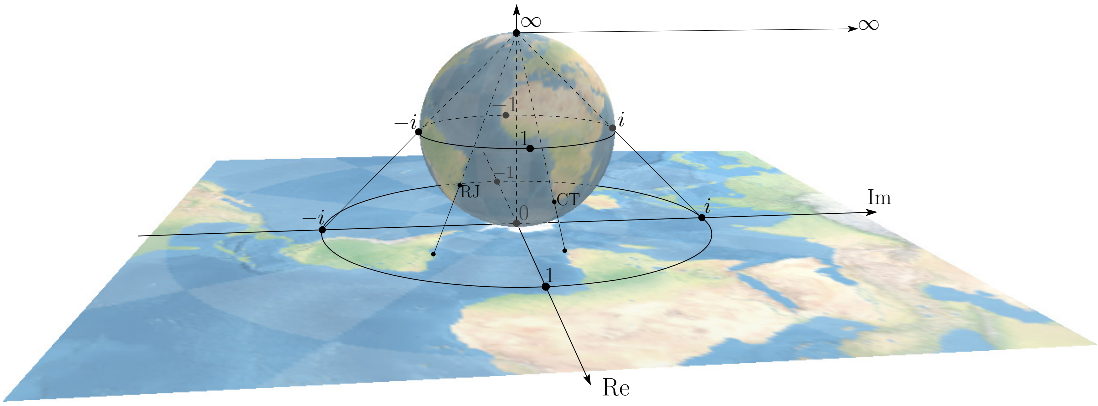
- A tetszőleges halmaz, és $f_0(z), f_1(z), \ldots$ $A \to \mathbb{C}$ függvények egy sorozata;
- $M_0, M_1, \ldots$ nemnegatív valós számokból álló sorozat, amelyre bármely $n \in \mathbb{N}$ és $z \in A$ esetén $\left|f_n(z)\right| \leqslant M_n$, vagyis a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysornak az $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ sor egyenletes majoránsa;
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergens (véges).

Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens az A halmazon.

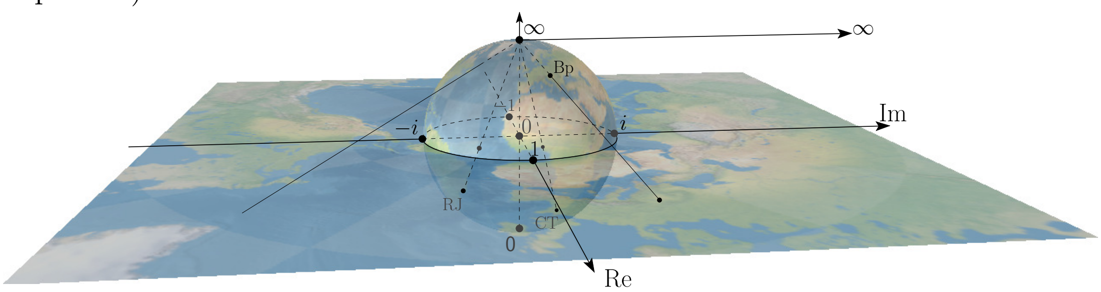
Riemann-gömb; végtelen határértékek

A valós számegyenessel és a projektív síkkal ellentétben nem definiálunk a különböző irányokhoz különböző végtelen távoli pontokat; nem lesz külön $+\infty$, $-\infty$, $i\infty$. Ehelyett egyetlen, közös végtelen távoli ponttal egészítjük ki a komplex síkot, a pont neve természetesen ∞ lesz.

A ∞-nel kiegészített komplex síkot azonosíthatjuk a gömbfelülettel egy jól ismert térbeli vetítés, a *sztereografikus projekció* segítségével. Az alábbi ábrán a földgömböt az Északi-sarkból vetítjük a Déli-sarkon át fektetett érintősíkra. Ha a gömb átmérőjét egységnyinek választjuk, akkor az egyenlítő pontjait éppen az egységnyi abszolút értékű komplex számoknak feleltetjük meg.



Ugyanezt a megfeleltetést kapjuk, ha a gömb sugara egységnyi, és az egyenlítő síkjára vetítünk (a kétféle vetítés között egy egyszerű középpontos nagyítás a kapcsolat):

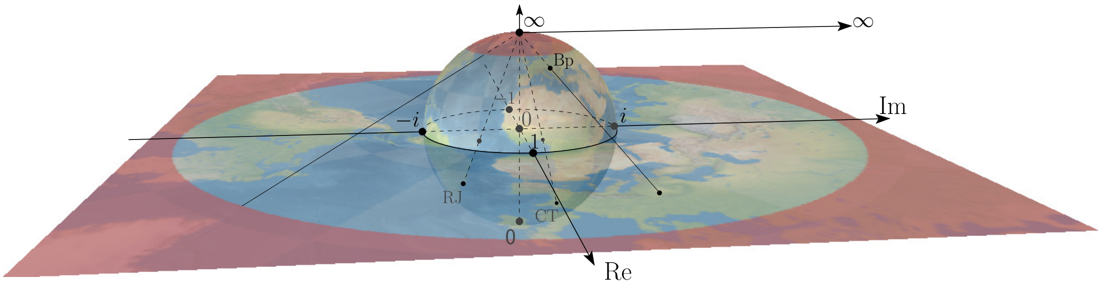


Az Északi-sarkot nem feleltettük meg egyetlen komplex számnak sem; az Északi-sark felel meg a végtelennek. Minél nagyobb abszolút értékű komplex számot vetítünk vissza gömbre, a vetítő egyenes annál kisebb szöget zár be a síkkal; a határesetekben, amikor úgy képzeljük el, hogy a vetített komplex szám valamilyen irányban "kimegy a végtelenbe", a vetítő egyenes érinti a gömböt az Északi-sarkban.

Az ilyen módon, a komplex számokkal és a ∞-nel megszámozott gömbfelület a *Riemann-gömb*.

A végtelen környezetei

Ha az Északi-sark egy környezetét (gömbsüveget) vetítjük a síkra, egy kör külsejét kapjuk. Ezért a ∞ gömbi környezetei az $\{z : |z| > r\}$ alakú halmazok.



A ∞-nek nincs előjele vagy iránya, $z \to \infty$ és $|z| \to \infty$ ugyanazt jelenti. Ezért semmi akadálya, hogy az $1/0$ alakú határértékeket is értelmezzük.

- $\frac{1}{0} = \infty$. (Valósban két különböző féloldali határérték lenne.)
- $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = a$
- $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$ stb.