2. Komplex differenciálhatóság

Komplex differenciálhatóság, geometriai jelentés. Differenciálási szabályok. Az inverzfüggvény differenciálási szabálya.

Cauchy–Riemann-egyenletek.

Holomorf függvény és egészfüggvény fogalma.

A valós egyváltozós differenciálás definícióját betűről betűre átírhatjuk:

Definíció

Tegyük fel, hogy $f(z)$ komplex függvény, $a \in \operatorname{int} D(f)$.

Az $f(z)$ függvény *differenciálható* az $a \in \mathbb{C}$ pontban, ha $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ létezik és véges; a jele $f'(a)$.

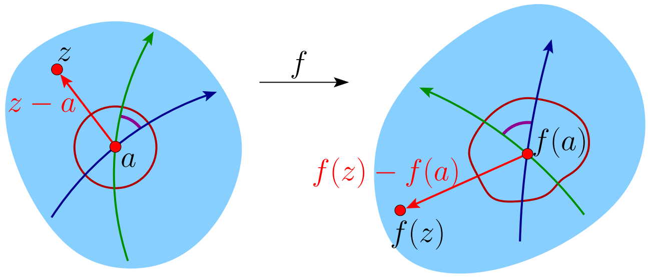
A szokásos ekvivalens átírások, amikor az a pont közelében az $f(z)$ függvényt egy lineáris függvénnyel közelítjük:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a) - f'(a) \cdot (z - a)}{|z - a|} = 0;$$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a) \cdot (z - a) + \varepsilon(z) \cdot (z - a) \quad \text{vagy} \\ f(z) &= f(a) + f'(a) \cdot (z - a) + \varepsilon(z) \cdot |z - a|, \end{aligned}$$

ahol $\lim\limits_{z \to a} \varepsilon = 0$, illetve $\varepsilon(z)$ folytonos a-ban és $\varepsilon(a) = 0$.

Érdemes elgonodolkodni az átfogalmazások geometriai jelentésén. Ha az $f'(a)$ derivált érték nem 0, akkor az $z \mapsto f'(a) \cdot z$ transzformáció egy forgatva nyújtás. A $z \mapsto f(a) + f'(a)(z - a)$ lineáris függvény egy irányítástartó hasonlósági transzformáció. Ez az a pont egy kis környezetét az $f(a)$ pont egy környezébe képezi; az a középpontú köröket $f(a)$ közepű körökbe, az a-n átmenő görbéket $f(a)$-n átmenő görbékbe képezi, és megtartja a görbék szögét is.



$$f(z) - f(a) = \underbrace{f'(a) \cdot (z - a)}_{\text{forgatva nyújtás}} + \underbrace{\varepsilon(z) \cdot |z - a|}_{\text{hibatag (zaj)}}$$

Az $f(a) + f'(a) \cdot (z - a)$ lineáris függvény persze csak közelíti az $f(z)$-t, de mivel $\varepsilon(z)$ az a pontban 0-hoz tart, a közelítés egyre pontosabb lesz, a hibatag még $|z - a|$-val osztva is 0-hoz tart. Ezért, továbbra is feltéve, hogy $f'(a) \neq 0$,

- az a pontban szögtartó (a szögek irányítását is megtartja);

- az a középű kicsi körök képe közelítőleg arányosan kicsi körök. (Arra nincs garancia, hogy a kör képe folytonos görbe, csak ha azt is feltételezzük, hogy a függvényünk az a pont egy környezetében folytonos.)

Ha $f'(a) = 0$, akkor a lineáris közelítésünk egy konstans függvény, és egyelőre semmit sem tudunk mondani arról, hogy mi történik a szögekkel, vagy milyenek a kicsi körök képei azon kívül, hogy *kicsik*.

Differenciálási szabályok

Az egyváltozós valós függvények differenciálási szabályai és ezek bizonyításai változtatás nélkül átírhatók komplex függvényekre.

Tétel

Ha f differenciálható az a pontban, akkor f folytonos a-ban.

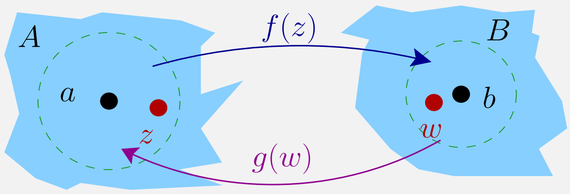
Tétel (differenciálási szabályok)

- $(c)' = 0$, $(z)' = 1$, $(z^n)' = nz^{n-1}$.
- Ha f differenciálható a-ban, akkor $c \cdot f$ is differenciálható a-ban, és $(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$.
- Ha f és g differenciálható a-ban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
- Ha f és g differenciálható a-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$
- Ha f és g differenciálható a-ban, és $g(a) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ is differenciálható a-ban, és
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$
- Ha $g(z)$ differenciálható a-ban, és $f(w)$ differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ is differenciálható a-ban, és
$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A bizonyítás betűről betűre ugyanaz, mint valósban.

A lokális inverz függvény differenciálásánál is működik a többváltozós analízisből tanult szabály átírása.

Tétel (lokális inverzfüggvény differenciálási szabálya)



- Tegyük fel, hogy az $f(z)$ és $g(w)$ függvények egymás *lokális inverzei* az a és b pontok körül, vagyis
  - $f(a) = b$ és $g(b) = a$
  - $f(z)$ értelmes egy $A \subset \mathbb{C}$ halmazon, amelynek a belső pontja, illetve $g(w)$ értelmes egy $B \subset \mathbb{C}$ halmazon, amelynek b belső pontja,
  - $f(A) = B$ és $g(B) = A$; az $f|_A : A \to B$ és $g|_B : B \to A$ függvények bijekciók A és B között, amelyek egymás inverzei;
- $f(z)$ differenciálható a-ban, és $f'(a) \neq 0$;
- $g(w)$ folytonos b-ben.

Ekkor g differenciálható b-ben, és $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Bizonyítás. A differenciálhatóság definíciója szerint

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) \neq 0,$$

ezért az a egy kis pontozott környezetében $f(z) \neq f(a)$.

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a w ponttal b-hez tartunk, miközben $z = g(w)$.

Mivel g folytonos b-ben, $z = g(w) \to g(b) = a$.

Mivel $f|_A$ és $g|_B$ egymás inverzei, $f(z) = f(g(w)) = w \to b = f(a)$.

Végül,

$$\frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \frac{z - a}{f(z) - f(a)} \to \frac{1}{f'(a)},$$

tehát

$$\lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

A differenciálási szabály persze nem mond semmit arról, hogy milyen $f(z)$ esetén létezik ilyen lokális inverz függvény. Ha az $f(z)$ differenciálhatóságát csak egyetlen pontban tételezzük fel, akkor a lokális inverz nem feltétlenül létezik.

Lehetséges a többváltozós valós analízisből kedves inverzfüggvénytételt átültetni komplex változós, komplex értékű függvényekre; ebben az esetben azt kell kikötnünk, hogy az $f(z)$ differenciálható az a pont egy környezetében, az $f'(z)$ deriváltfüggvény folytonos az a pontban, és $f'(a) \neq 0$.

Később látni fogjuk, hogy a deriváltfüggvény folytonosságát nem szükséges kikötni, és a lokális inverz létezését is igazolni fogjuk, a többváltozós valósnál sokkal elegánsabb eszközökkel.

Cauchy–Riemann egyenletek

Vizsgáljuk meg, mi a komplex differenciálhatóság definíciója, ha a függvényt kétváltozós, $\mathbb{R}^2$-be képező függvénynek tekintjük. Legyen tehát $f(z)$ komplex függvény, ami értelmes a $z_0 = a + bi$ pont egy környezetében. Az f valós és képzetes részét egy-egy kétváltozós valós értékű függvénynek is tekinthetjük; a z változót $x + yi$ alapban fogjuk kifejezni a valós és a képzetes résszel:

$$\operatorname{Re} f(x+yi) = u(x,y), \quad \operatorname{Im} f(x+yi) = v(x,y).$$

Ha az z_0 ponton át fektetett vízszintes egyenesen tartunk z_0-hoz, akkor rögzítjük $y = b$-t, és az x koordinátával tartunk a-hoz. Feltéve, hogy u és v is parciálisan differenciálható,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x+bi) - f(a+bi)}{(x+bi) - (a+bi)} = \lim_{x\to a} \frac{\big(u(x,b) + v(x,b)i\big) - \big(u(a,b) + v(a,b)i\big)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(\frac{u(x,b) - u(a,b)}{x-a} + \frac{v(x,b) - v(a,b)}{x-a} i \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) \cdot i, \end{aligned}$$

vagyis $f'(z_0)$ valós és képzetes része $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b)$, illetve $\dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b)$.

Ha függőleges irányból tartunk z_0-hoz, akkor $x = a$-t rögzítjük, és y-nal tartunk b-hez, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y\to b} \frac{f(a+yi) - f(a+bi)}{(a+yi) - (a+bi)} = \lim_{y\to b} \frac{\big(u(a,y) + v(a,y)i\big) - \big(u(a,b) + v(a,b)i\big)}{(y-b)i} \\ &= \lim_{y\to b} \left(\frac{u(a,y) - u(a,b)}{y-b} \cdot \frac{1}{i} + \frac{v(a,y) - v(a,b)}{y-b} \right) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) \cdot i + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b); \end{aligned}$$

ebből meg azt olvashatjuk le, hogy $f'(z_0)$ valós és képzetes része $\dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b)$, illetve $-\dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b)$. A kétféle eredmény összehasonlításából kapjuk a komplex differenciálhatóság feltételét. amit pontosabb számolással be is bizonyítunk:

Tétel (Cauchy-Riemann differenciálegyenletek)

Legyen $f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ (Az u, v függvények valós változósak és valós értékűek).

Az f akkor és csak akkor differenciálható az $a + bi$ pontban, ha u és v valós értelemben differenciálható az (a, b) pontban,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)$$

avagy, az $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ leképezés Jacobi-mátrixa az (a, b) pontban

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

alakú.

Bizonyítás. Elég $a = b = 0$-ra bizonyítani. $(r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad c, d \in \mathbb{R})$. Ezek ekvivalensek:

- $f'(0) = c + di = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- $f\big(x + yi\big) - f(0) = (c + di)(x + yi) + o(r)$
- $\big(u(x, y) + v(x, y)i\big) - \big(u(0, 0)\big) + v(0, 0)i\big) = (cx - dy) + (dx + cy)i + o(r)$
- $u(x, y) - u(0, 0) = cx - dy + o(r)$ és $v(x, y) - v(0, 0) = dx + cy + o(r)$
- u és v diffható $(0, 0)$ pontban, $c = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$ és $d = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$ □

Példa

Hol differenciálható az $f(z) = \overline{z}$ függvény?

1. megoldás:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{z} - \overline{a}}{z - a} =?$$

vagy,

$z = a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-vel $\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} = \dfrac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$

a hossza egységnyi, az iránya 2φ, bármi lehet. Nincs határérték; $\overline{z}$ sehol sem differenciálható. □

2. megoldás: Ellenőrizzük a Cauchy-Riemann egyenleteket. Mivel $\overline{x + yi} = x - yi$,

$$u(x, y) = x \quad \text{és} \quad v(x, y) = -y.$$

Azt láthatjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$$

ezek sehol sem egyeznek meg. Tehát, az első Cauchy–Riemann egyenlet sehol sem teljesül, a $\overline{z}$ függvény sehol sem differenciálható. □

Vegyük észre, hogy $\overline{z}$ szög- és körtartó, de nem irányítástartó, hanem irányításváltó.

Megjegyzés

Két tükrözés együtt éppen visszafordítja az irányítást:
Ha az $f(z)$ függvény differenciálható az a pontban, akkor a

$$g(w) = \overline{f(\overline{w})}$$

függvény differenciálható az $\overline{a}$ pontban és $g'(\overline{a}) = \overline{f'(a)}$.

Bizonyítás.

$$\lim_{w\to\overline{a}} \frac{g(w) - g(\overline{a})}{w - \overline{a}} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(a)}}{\overline{z} - \overline{a}} = \lim_{z\to a} \overline{\left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a}\right)} = \overline{\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}} = \overline{f'(a)}.$$

□

Holomorf függvények

A komplex differenciálhatóság nem túl hasznos egyetlen pont esetén, de teljesen más lesz a helyzet, ha a függvényünk egy nyílt halmazon differenciálható.

Definíció (holomorf tulajdonság)

- $f(z)$ az a pontban *holomorf*, vagy *reguláris*, ha az a pont egy környezetében differenciálható.
- $f(z)$ a D tartományon *holomorf*, vagy *reguláris*, ha D minden pontjában differenciálható.
- $f(z)$ *egészfüggvény*, ha az egész síkon holomorf.
- A holomorf $D \to \mathbb{C}$ függvények rendszerét (vektorterét, gyűrűjét) $\mathcal{O}(D)$-vel fogjuk jelölni.

Tétel

Tegyük fel, hogy f holomorf a D tartományon.

(a) $f' \equiv 0$, akkor f konstans.

(b) Ha $\operatorname{Re} f$ vagy $\operatorname{Im} f$ konstans, akkor f konstans.

Bizonyítás. Legyen $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$, ekkor a Cauchy–Riemann egyenletek szerint

$$f'(x+yi) = u_x(x,y) - u_y(x,y)i = v_y(x,y) + v_x(x,y)i.$$

(a) Ha $f' \equiv 0$, akkor $u_x \equiv u_y \equiv v_x \equiv v_y \equiv 0$, ezért u és v minden vízszintes és minden függőleges szakaszon konstans. A D tartomány összzefüggő nyílt hamaz, ezért bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely csak vízszintes és függőleges szakaszokkal; ezért u, v és f is ugyanazt az értéket veszi fel a töröttvonal két végpontjában.

(b) Ha $\operatorname{Re} f = u$ konstans, akkor $u_x \equiv u_y \equiv 0$, és a Cauchy–Riemann egyenletek miatt $v_x \equiv v_y \equiv 0$; a bizonyítást ugyanúgy fejezhetjük be, mint az (a) részben.

Ugyanez történik, ha $\operatorname{Im} f = v$ konstans. □

Ennek a tételnek speciális esete, hogy a konstans függvények kivételével nincs olyan holomorf függvény, amely csak valós, vagy csak tisztán képzetes értékeket venne fel.

Példa

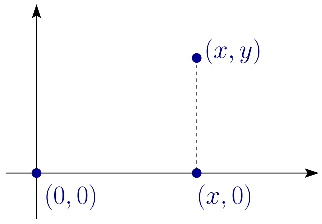
Legyen $u(x,y) = e^x \cos y$. Írjuk fel az összes olyan $v(x,y)$ függvényt, amelyre

$$x + yi \mapsto u(x,y) + v(x,y)i$$

egészfüggvény.

Megoldás: A Cauchy-Riemann egyenletekből

$$v_x = -u_y = e^x \sin y, \qquad v_y = u_x = e^x \cos y.$$



Legyen $C = v(0,0)$.

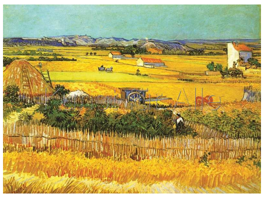
$$v(x,y) = v(0,0) + \big(v(x,0) - v(0,0)\big) + \big(v(x,y) - v(x,0)\big) =$$
$$= C + \int_0^x v_x(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y v_y(x,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = C + \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y e^x \cos\zeta\,\mathrm{d}\zeta = C + e^x \sin y.$$

Még nem vagyunk készen; ellenőrizni kell, hogy ezekre a függvényekre tényleg teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek:

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad -u_y = v_x = e^x \sin y. \qquad \square$$

Grafikák komplex függvényekkel

Ezek a műalkotások a Leideni egyetemen találhatók.



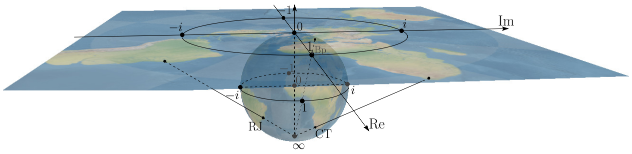
Van Gogh Mező c. képével és a tülörképeivel kicsempézték a síkot, és alkalmazták rá a Riemann-zeta függvényt.
https://pub.math.leidenuniv.nl/~smitbde/vis/goghriemann

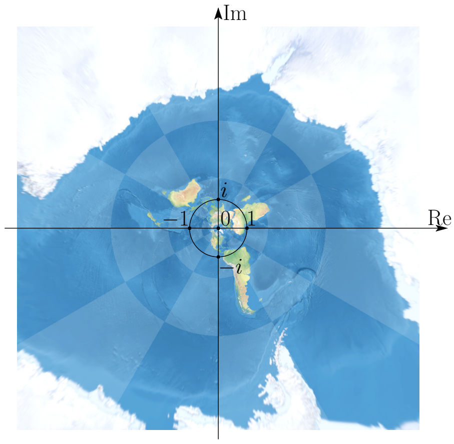
Ugyanaz, mint az előző, csak Rembrant éjjeli őrjárat c. képével és a j-függvénnyel.
https://pub.math.leidenuniv.nl/~smitbde/im/nwdb-cropped-j.png

Ahol a függvény deriváltja nem nulla, ott a kis részletek képe nagyjából hasonló az eredetihez, a hasonlóság jól felismerhető.

Holomorf függvények ábrázolása térképekkel

A síkba vetített földgömböt holomorf függvények ábrázolására is használhatjuk. A szokásos, Északi-sarkból való vetítésnek hátránya, hogy megfordítja az irányítást, ezért vetítsünk inkább a Déli-sarkból. Ennek a vetítésnek előnye, hogy nem csak szög- és körtartó, hanem irányítástartó is.

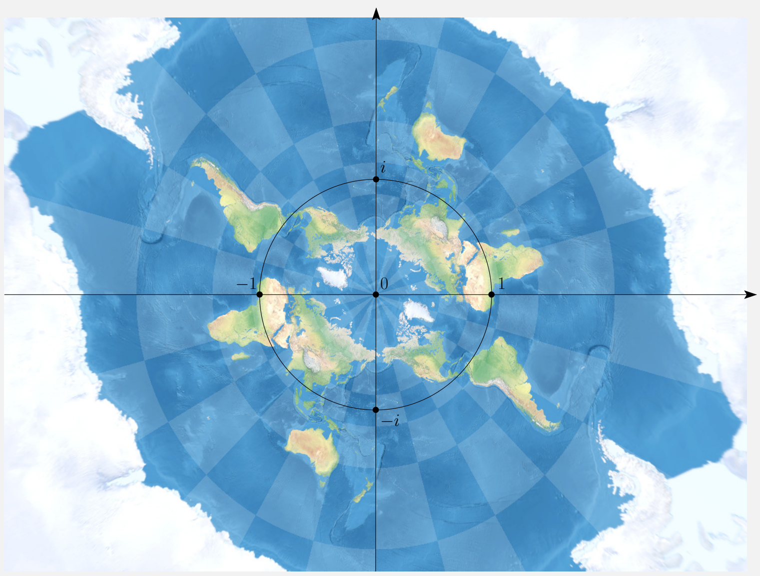




sztereografikus vetület a Déli-sarkból

Egy $f(z)$ függvény "képét" úgy készíthetjük el, hogy minden egyes, a képen szereplő z ponthoz leolvassuk az $f(z)$ pont színét a síkba vetített földgömbön.

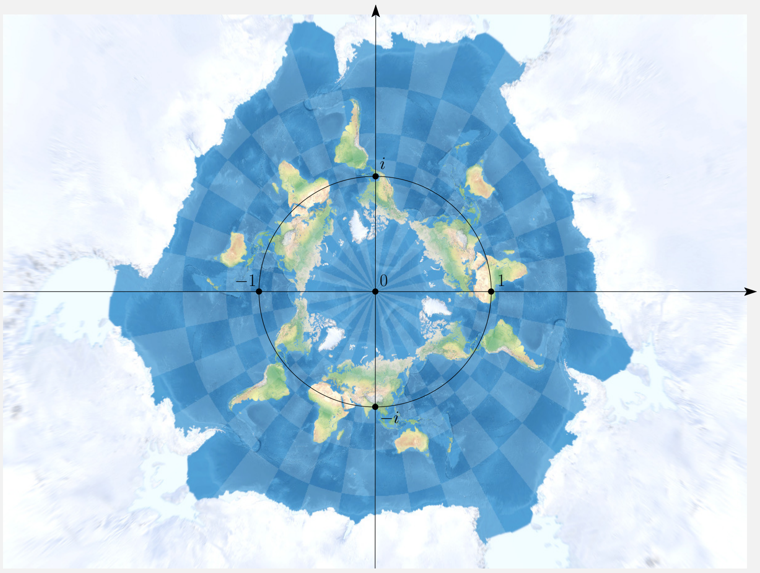
Példa (Az z^2 függvény)



$$f(z) = z^2, \qquad f'(z) = 2z$$

- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (Déli-sark)
- $f(0) = 0$ (Északi-sark)
- $f'(0) = 0$, ott nem szögtartó

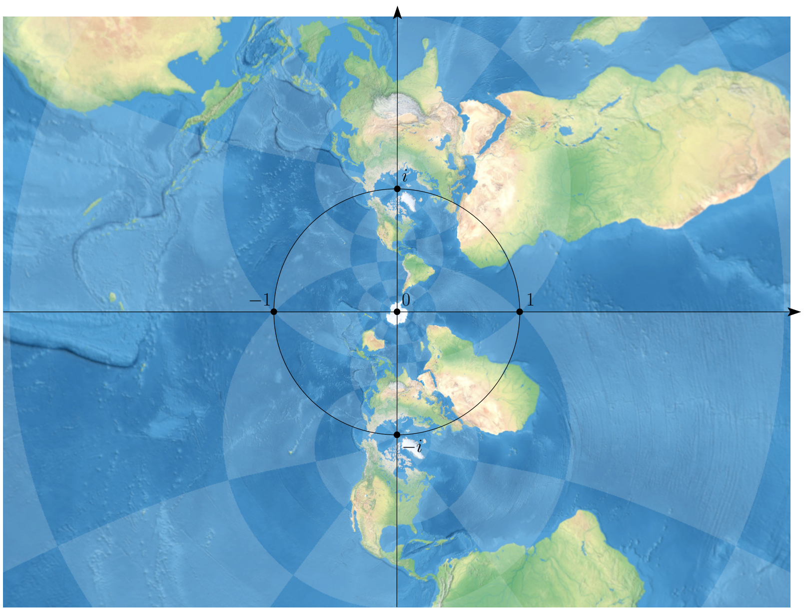
Példa (Az z^3 függvény)



$$f(z) = z^3, \qquad f'(z) = 3z^2$$

- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ (Déli-sark)
- $f(0) = 0$ (Északi-sark)
- $f'(0) = 0$, ott nem szögtartó

Például a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvény, az úgynevezett *Zsukovszkij-függvény* képe a következő:



A 0-ban a függvény (határ)értéke ∞, ezért láthatjuk a 0 körül az Antarktiszt. A $\pm i$ pontokban a függvény értéke 0 (Északi-sark).

A ± 1 pontokban $w(\pm 1) = \pm 1$ és $w'(\pm 1) = 0$. Ezekben a pontokban a függvény nem is szögtartó: a sztereografikus vetületen a ± 1 pontokban négy derékszögű tartomány találkozik, a függvény képén pedig nyolc, 45°-os.