3. Hatványsorok

Hatványsor konvergenciája. Differenciálhatóság. Cauchy-Hadamard tétel. Taylor-együttható, egyértelműség. Analitikus függvények.

Eddig nem sok példát láttunk holomorf fügvényre. A differenciálási szabályokból annyit láthatunk, hogy a polinomok és racionális tört függvények holomorfak, de hiányoznak a valós analízisből ismert építőkövek: nem egész kitevős hatványozás, exponenciális és logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények és inverzeik. Ezeknek egy részét egy-egy komplex hatványsor segítségével fogjuk definiálni, de ehhez előbb levezetjük a komplex hatványsorok alapvető tulajdonságait.

Definíció (c körüli hatványsor)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots \qquad (c, a_n \in \mathbb{C}; \quad 0^0 = 1)$$

A középpontban szükségünk van a 0^0 hatványra; ezt 1-nek definiáljuk.

A komplex hatványsorok esetében mindig a legegyszerűbb, pontonkénti konvergenciát fogjuk használni, de meg fogjuk különböztetni azokat az eseteket, amikor a sor abszolút konvergens, vagy valamilyen halmazon egyenletesen is konvergens.

Példák

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ az egész síkon konvergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(z-2)^n$ csak a $z = 2$ pontban konvergens
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ az egységkör belsejében konvergens, a körvonalon és kívül divergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2}$ a -1 középpontú zárt egységkörlemezen konvergens, kívül divergens
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ a zárt egységkörlemezen konvergens, kivéve a $z = 1$ pontot

Az utolsó példa nem triviális. A $z = 1$ esetben a sor a jól ismert harmonikus sor, amelynek összege ∞. A $z = -1$ esetben az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ konvergens Leibniz sort kapjuk. Az egységkörvonal többi pontjában az Abel-átrendezés nevű technikával bizonyíthatjuk, hogy a sor konvergens.

A fenti példákban a konvergenciahalmaz vagy valamilyen körlemez, vagy egyetlen pont, vagy a teljes sík. Ezeket is tekinthetjük elfajuló körlemeznek, amelynek sugara 0, illetve ∞. Ezzel a kiegészítéssel általában is igaz, hogy a konvergenciahalmaz egy körlemez.

Tétel

- A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciahalmaza egy c középpontú körlemez, a sugarát hívjuk a sor konvergenciasugarának. A konvergenciasugár lehet 0 és ∞ is.
- A körlemez belsejében a sor abszolút konvergens, külsejében divergens; a határon sokféle eset előfordulhat.
- Bármilyen, kisebb sugarú körlemezen a sor egyenletesen konvergens.

Megjegyzés. *Az abszolút konvergens sorokat szeretjük, mert mindenféle machinációt szabadon elkövethetünk, az egyenletes konvergencia pedig jól jön majd, amikor integrálni akarunk.*

Bizonyítás. Legyen

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ konvergens} \right\} \quad \text{és} \quad R = \sup \left(|z-c| : z \in K \right\}.$$

A definíció szerint $K \subset \overline{B}(c,R)$, ezért a $\overline{B}(c,R)$ körön kívül a hatványsor divergens.

Vegünk most egy $r < R$ számot; azt akarjuk igazolni, hogy a $\overline{B}(c,r)$ körlemezen a sor egyenletesen abszolút konvergens; ehhez a Weierstrass-kritétiumot fogjuk használni.

Mivel $r < R$, van olyan $z_0 \in K$ szám amelyre $|z - z_0| > r$. Ebben a pontban a hatványsor konvergens, ezért a tagjai 0-hoz tartanak. Ebből csak arra lesz szükségünk, hogy az $a_n z_0^n$ sorozat korátos; van egy olyan $M \geqslant 0$ szám, amelyre bármely n esetén $|a_n z_0^n| \leqslant M$.

Ezek után bármely $z \in \overline{B}(c,r)$ számra és n indexre

$$\left|a_n(z-c)^n\right| \leqslant |a_n| r^n = \left|a_n(z_0-c)^n\right| \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n \leqslant M \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n.$$

A hatványsort a $\overline{B}(c,r)$ halmazon egyenletesen majorálja a $\sum M \cdot \left(\frac{r}{|z_0-c|}\right)^n$ sor. Ez a sor egy mértani sor, a hányadosa 1-nél kisebb, tehát konvergens. A Weierstrass-kritérium szerint tehát a hatványsor az $\overline{B}(c,r)$ halmazon egyenletesen konvergens.

Az R-nél kisebb sugarú körlemezek uniójaként az egész $B(c,R)$ nyílt körlemez előáll, tehát a kör belseében a hatványsor pontonként konvergens.

A konvergenciasuarat kifejezhetjük az együtthatók abszolút értékeivel.

Tétel (Cauchy–Hadamard tétel)

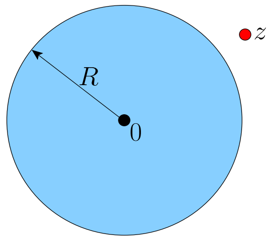
A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ha a lim sup értéke 0, akkor a konvergenciasugár végtelen, tehát a sor az egész síkon konvergens.
Ha a lim sup értéke végtelen, akkor a konvergenciasugár 0, tehát a sor csak a középpontban konvergens.

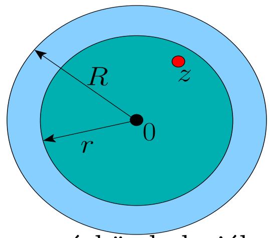
Bizonyítás. Elég $c = 0$-ra.

(a) Ha z az R sugarú körlemez külsejében van, vagyis $|z| > R$, akkor $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Emiatt végtelen sok olyan n index van, amelyre $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Az ilyen n-ekre $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| > 1$, tehát $|a_n z^n| > 1$. Akkor viszont a sor tagjai nem tartanak 0-hoz, a sor nem lehet konvergens.



(b) Válasszunk most egy tetszőleges $0 < r < R$ sugarat, és vizsgáljuk a sort az r sugarú zárt körlemezen. Legyen $\frac{1}{R} < m < \frac{1}{r}$.

Mivel $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < m$, elég nagy n esetén $\sqrt[n]{|a_n|} < m$. Akkor pedig bármely $z \leqslant r$-re $|a_n z^n| < m^n r^n = (mr)^n$, a hatványsor egyenletesen majorálható a $\sum (mr)^n$ konvergens mértani sorral. Tehát, a Weierstrass-kritérium szerint az r sugarú zárt körlemezen a sor egyenletesen abszolút konvergens.



Ez bármely $r < R$ esetén elmondható, tehát a sor a R sugarú kör belsejében abszolút konvergens.

Tagonkénti differenciálás

Lemma

Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R.

(a) A tagonkénti deriváltakból álló $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara is R.

(b) A konvergenciakör belsejében f differenciálható.

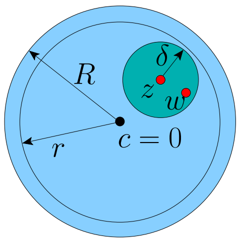
(c) A konvergenciakör belsejében $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$, vagyis szabad tagonként deriválni.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}.$$

Bizonyítás. (a): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}$ konvergenciasugara ugyanaz, mint $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^n$ konvergenciasugara, ami

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup \Big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\ \sqrt[n]{|a_n|}\Big)} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

(b,c): Ismét $c = 0$; z tetszőleges pont a körön belül, és $|z| < r < R$.
Tudjuk, hogy az $\sum n|a_n|r^{n-1}$ sor konvergens.
Csak olyan w számokat fogunk használni, amelyekre $|w| < r$.



$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - z^n}{w-z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(w^{n-1} + w^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\right). \qquad (*)$$

Az n-edik tag az $a_n \cdot nz^{n-1}$ számhoz tart. Jó lenne a szummát és a tagonkénti határértéket felcserélni.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ehhez van olyan N, hogy $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Ezekhez van olyan $0 < \delta < r - |z|$, hogy $w \in B(z, \delta)$ és $1 \leqslant n \leqslant N$ esetén

$\left|a_n\left(w^{n-1}+\ldots+z^{n-1}\right)-na_nz^{n-1}\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$, így

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{w-z}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Big(w^{n-1}+\ldots+z^{n-1}-nz^{n-1}\Big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left|a_n\left(w^{n-1}+\ldots+z^{n-1}\right)-na_nz^{n-1}\right|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|\cdot 2nr^{n-1}<N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Alternatív befejezés: (Ez változat mértékelméleti eszközöket is használ.) A $(*)$ sort dominálja az $\sum n|a_n|r^{n-1}$ konvergens sor, mert $\left|a_n\left(w^{n-1}+\ldots+z^{n-1}\right)\right|\leqslant|a_n|\cdot nr^{n-1}$.

A dominált konvergencia tétel miatt az összeg és a $w\to z$ határérték felcserélhető:

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=\lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to z}\Big(a_n\left(w^{n-1}+w^{n-2}z+\ldots+z^{n-1}\right)\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nz^{n-1}.$$

Tétel

Legyen

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében holomorf.
- $f(z)$ a konvergenciakör belsejében akárhányszor differenciálható.
- $a_k=\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$.
- A hatványsor egyértelmű: Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^n$ a c pont egy környezetében, akkor $a_n=b_n$ minden n-re.

Példa. *Az egységkör belsejében*

$$f(z)=1+z+z^2+z^3+\ldots=\frac{1}{1-z}.$$

Négyzetre emelve:

$$f(z)^2=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}z^m\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m+n=k}z^k=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$$

Négyzetre emelés helyett tagonként deriválva:

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$