4. Elemi függvények

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények. A logaritmus és a hatványfüggvény értelmezésének problémái, többértékű függvény holomorf ága.

Elemi függvények definíciói

A valósból ismert hatványsorokat kiterjesztjük komplexre:

Definíció

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - + \dots$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - + \dots$$

Ezek a sorok az egész síkon konvergensek.

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Tétel ($\exp z$ **tulajdonságai)**

(a) $(e^z)' = e^z$;

(b) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$;

(c) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Bizonyítás. (a,b) trivi a hatványsorból.

(c): Rögzítjük a $s = z + w$ számot. Legyen $f(z) = e^z \cdot e^{s-z}$.

$$f'(z) = (e^z \cdot e^{s-z})' = (e^z)' \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (e^{s-z})' = e^z \cdot e^{s-z} + e^z \cdot (-e^{s-z}) = 0.$$

f konstans, $f(z) = f(0) = e^s$.

Tehát $e^z \cdot e^w = e^z \cdot e^{s-z} = e^s = e^{z+w}$.

Alternatív bizonyítás a (c) részre:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = e^z \cdot e^w.$$

Tétel

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$
- $e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y); \quad e^z \neq 0; \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z \equiv \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$
- e^z periodikus $2\pi i$ szerint
- e^z sehol sem 0.
- $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \cos(x+yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x + i \dfrac{e^{-y} - e^y}{2} \sin x$
- $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \sin(x+yi) = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + i \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x$
- $\cos z$ és $\sin z$ periodikus 2π szerint
- $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$
- A valós tengelyen kívül $\cos z$ és $\sin z$ sehol sem 0. A $\cos z$ és $\sin z$ gyökei a valósból ismert $(k + \frac{1}{2})\pi$, illetve $k\pi$ pontok.
- A $\cos z$ és $\sin z$ függvények nem korlátosak.
- A megszokott trigonometrikus azonosságok érvényesek

Bizonyítás.

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \frac{(iz)^9}{9!} + \dots$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} - + \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} - + \dots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Például

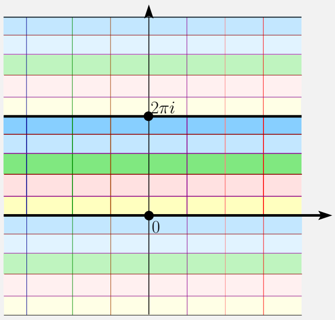
$$\cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w =$$
$$= \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{wi} + e^{-wi}}{2} - \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{wi} - e^{-wi}}{2i} =$$
$$= \frac{(e^{zi} + e^{-zi})(e^{wi} + e^{-wi}) + (e^{zi} - e^{-zi})(e^{wi} - e^{-wi})}{4} =$$
$$= \frac{e^{(z+w)i} + e^{-(z+w)i}}{2} = \cos(z+w).$$

A többi azonosságot ugyanígy lehetne ellenőrizni.

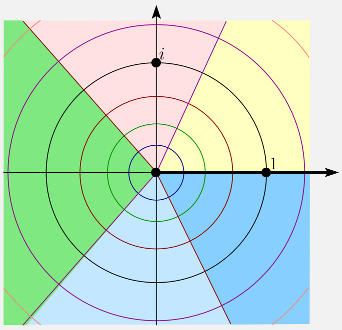
Következmény

A komplex exponenciális függvényt alkalmazva

- minden víszszintes egyenes képe 0-ból kiinduló félegyenes;
- minden függőleges egyenes képe 0 középpontú kör,
- vízszintes egyenesekkel határolt sáv képe 0 csúcsú szögtartomány.



$\xrightarrow{\exp z}$



Következmény (elemi függvények határértékei, ha $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$)

függvény	$y \to +\infty$	$y \to -\infty$
$e^{iz} = e^{-y+xi}$	0	∞
$e^{-iz} = e^{y-xi} = \dfrac{1}{e^{iz}}$	∞	0
$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$	∞	∞
$\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	∞	∞
$\operatorname{tg} z = -i\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -i\dfrac{1-e^{-2iz}}{1+e^{-2iz}}$	i	$-i$
$\operatorname{ctg} z = i\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\dfrac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}}$	$-i$	i

Komplex logaritmus

Rózsaszínű álom: Van-e komplex logaritmus?

Olyan $\log z$ függvényt szeretnénk, amelyre $z \neq 0$ esetén

$$z = e^{\log z},$$

vagyis

$$|z| = \left|e^{\log z}\right| = e^{\operatorname{Re}\log z} \quad \text{és} \quad \arg z = \arg e^{\log z} = \operatorname{Im}\log z,$$

vagyis

$$\operatorname{Re}(\log z) = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| \quad \text{és} \quad \operatorname{Im}(\log z) = \arg z$$

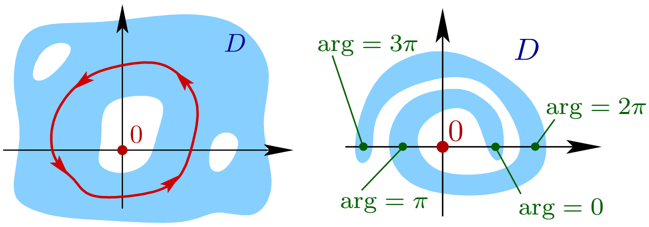
... öö ... és még differenciálható is legyen (de legalább folytonos).

Az argumentumot nem tudjuk folytonosan értelmezni az egész $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ síkon, ezért nincs az egész síkon értelmes logaritmusfüggvény.

- Próbálkozhatunk többértékű függvénnyel, minden nemnulla számnak végtelen sok logaritmusa lesz
- Vagy minden számhoz csak egyetlen értéket választunk, de akkor cserébe nem minden számnak lesz logaritmusa.

Milyen D tartományokon létezik logaritmusfüggvény?

- Szemléletesen, ha a tartomány (vagy a tartományban egy zárt görbe) "megkerüli" a 0-t, mint a balolali ábrán, akkor nem létezik $\arg z$-nek és $\log z$-nek folytonos ága D-n.
- Ha a tartomány "nem kerüli meg" a 0-t, mint például a jobboldali ábrán, akkor létezik D-n folytonos argumentum- és logaritmusfüggvény.

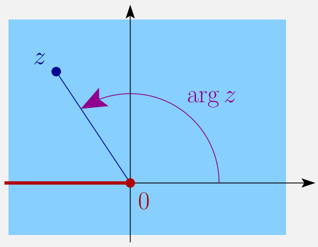


Hamarosan megvizsgáljuk precízebben.

Definíció

A logaritmus "főértéke": Nem értelmezzük a nempozitív valós helyeken.

$$\log z = \underbrace{\log}_{\text{valós log}} |z| + i \cdot \arg z, \qquad -\pi < \arg z < \pi$$



Tétel

Ha a D tartományon létezik a $\log z$-nek folytonos ága, akkor ez holomorf is, és $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$.

Bizonyítás. Legyen $b \in D$ tetszőleges és $a = \log b$. Az inverz függvény differenciálási szabálya működik: $e^a = b$, $\log b = a$, e^w diffható és a deriváltja nem 0, továbbá $\log z$ folytonos b-ben. Tehát,

$$(\log z)'\Big|_{z=b} = \frac{1}{(e^w)'\big|_{w=a}} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}.$$

A logaritmus azonosságai

A valós számkörben érvényes $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság nem marad érvényes, hiszen magát a logaritmust is csak modulo $2\pi i$ értelemben ismerjük, tehát komplexben legfeljebb csak annyit mondhatunk, hogy

$$\log(ab) \equiv \log a + \log b \pmod{2\pi i}.$$

Amikor a logaritmus egy holomorf ágát vesszük egy speciális halmazon, akkor a végtelen sok lehetséges érték közül ragadunk ki egyet. Bármilyen logaritmus ágat (vagy ágakat) választunk is, lesznek olyan esetek, amikor $\log a$, $\log b$ és $\log(ab)$ közül valamelyik nem értelmezett, de még ha értelmesek is, akkor is lehetnek olyan a, b párok, amikor $\log(ab)$ és $\log a + \log b$ nem ugyanaz, hanem a különbségük $2\pi i$-nek valamilyen többszöröse.

Példa

- Ha a logaritmus főértékét vesszük, akkor
  - a nempozitív helyeken nincs értelme a logaritmusnak, így például
  $$\log(-1) \stackrel{?}{=} \log i^2 = 2\log i$$
  baloldala nem is értelmes;
  - például az $a = b = e^{2\pi i/3}$ esetben az argumentum "túlcsordul":
  $$\log a + \log b = \frac{4\pi i}{3} \quad \text{míg} \quad \log(ab) = -\frac{2\pi i}{3}.$$
- Ha a logaritmus főértékéhez $100\pi i$-t hozzáadunk, az is egy logaritmus ág, és például
$$\log 1^2 = \log 1 + \log 1 - 100\pi i.$$

Hatványozás

Megpróbálkozhatunk az
$$a^b = \exp\big(b \cdot (\log a + k \cdot 2\pi i)\big)$$
képlettel. Ez az olyan tartományokon értelmes, ahol van logaritmus.

- Az egész kitevős hatványokkal nincs gond; ha $b \in \mathbb{Z}$, akkor $\log a$ minden értéke ugyanazt a hatvány értéket adja.
- Racionális, de nem egész kitevő esetén véges sok lehetséges érték lehet, például minden komplex számnak két négyzetgyöke van; irracionális kitevő esetén végtelen sok érték létezik.
- Fix alap esetén $\log a$ különböző értékei különböző $a^z = \exp\big(z \cdot \log a\big)$ függvényeket adnak. Sőt, már az 1^z alakú függvényekből is végtelen sok van...
- Megállapodás: ha a fix pozitív valós, akkor a valós értékű logaritmust vesszük, ezzel a valós exponenciális függvényeket terjesztjük ki.
- Ha egy tartományon létezik $\log f(z)$-nek holomorf ága, akkor a logaritmus mindegyik ágából kapunk egy-egy lehetséges $f(z)^{g(z)} = \exp\big(g(z) \cdot \log f(z)\big)$ függvényt, ezek közül választhatunk.

A hatványozás azonosságai

Rögzített alap esetén érvényben maradnak az $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$ és $a^{z-w} = a^z/a^w$ azonosságok, és ezek következményeként egész n számok esetén az $(a^z)^n = a^{nz}$ is, mert mindig ugyanannak az alapnak ugyanazt a logaritmusát vesszük:
$$a^{z+w} = e^{(z+w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a + w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a} \cdot e^{w\cdot\log a} = a^z \cdot a^w$$
és
$$a^{z-w} = e^{(z-w)\cdot\log a} = e^{z\cdot\log a - w)\cdot\log a} = \frac{e^{z\cdot\log a}}{e^{w\cdot\log a}} = \frac{a^z}{a^w}.$$

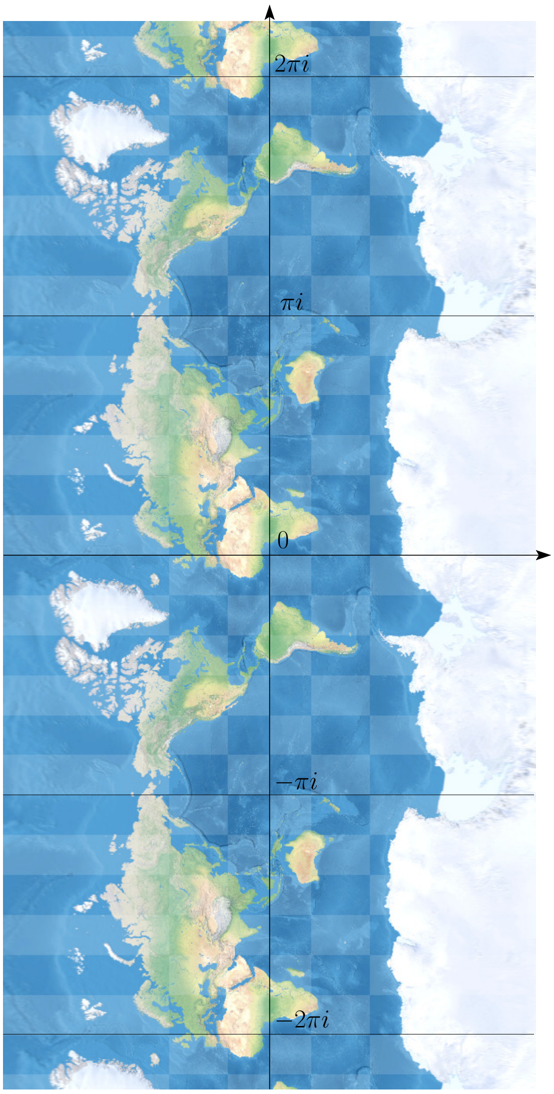
Pozitív valós alapok esetén az $(ab)^z = a^z \cdot b^z$ azonosság is érvényes marad, mert a megállapodásunk szerint mindhárom alapnak a valós logaritmusát használjuk, és ott érvényes a $\log(ab) = \log a + \log b$ azonosság:

$$(ab)^z = e^{z\cdot\log(ab)} = e^{z\cdot(\log a+\log b)} = e^{z\cdot\log a+z\cdot\log b)} = e^{z\cdot\log a} \cdot e^{z\cdot\log b)} = a^z \cdot b^z.$$

Vegyes komplex alapok esetén óvatosan kell eljárnunk, a valósból ismert képletek csak akkor maradnak érvényesek, ha mindenhol a megfelelő logaritmusokat választjuk.

Elemi függvények képei

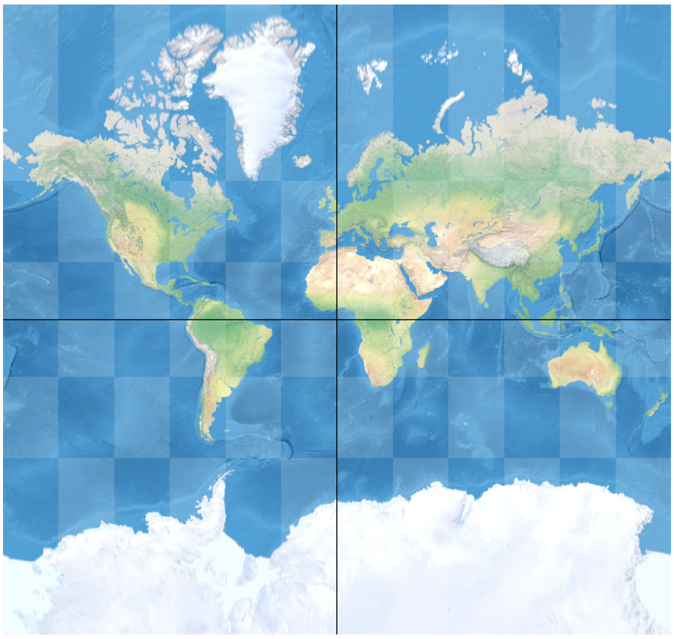
Exponenciális függvény és Mercator-térkép



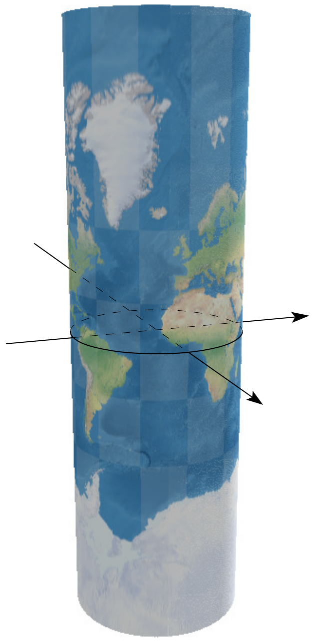
$\exp z$

Az exponenciális függvény $2\pi i$ szerint periodikus. Ha $\operatorname{Re} z \to +\infty$, akkor $e^z \to \infty$, $\operatorname{Re} z \to -\infty$ esetén pedig $e^z \to 0$, ezért látjuk a jobboldalon a Déli-, a baloldalon pedig az Északi-sarkot.

Az exponenciális függvény képéből $-90°$-os elforgatással elforgatva kapjuk az e^{-iz} függvény képét, ami egy függőleges irányban végtelen, 2π széles sávokból álló, periodikus térkép, az úgynevezett *Mercator-térkép*. A térképet végtelen hengerre csavarhatjuk; a henger felső ideális pontja felel meg az Északi-, az alsó ideális pont a Déli-sarknak.



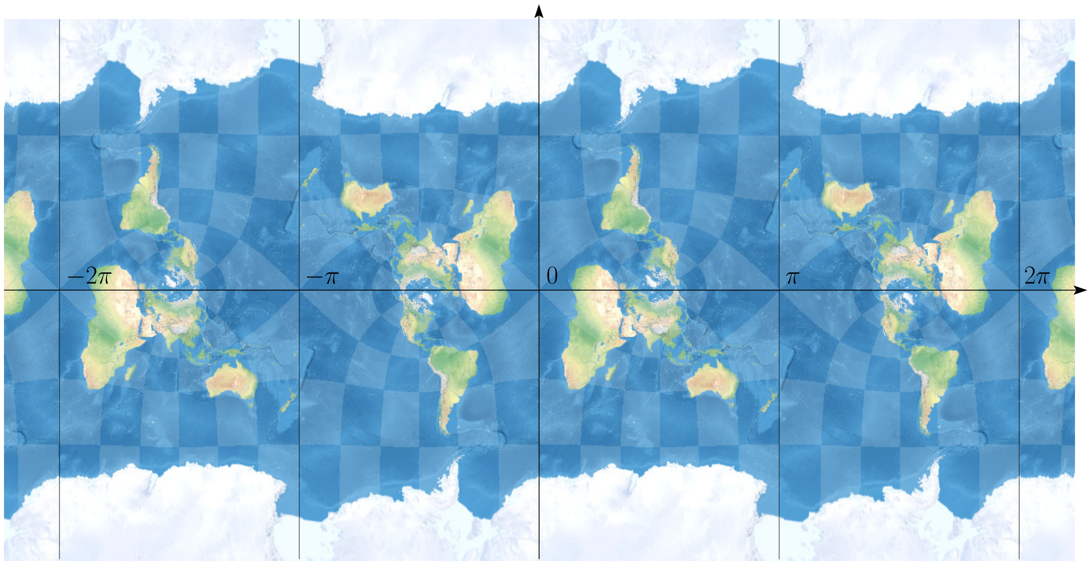
e^{-iz}, Mercator-térkép



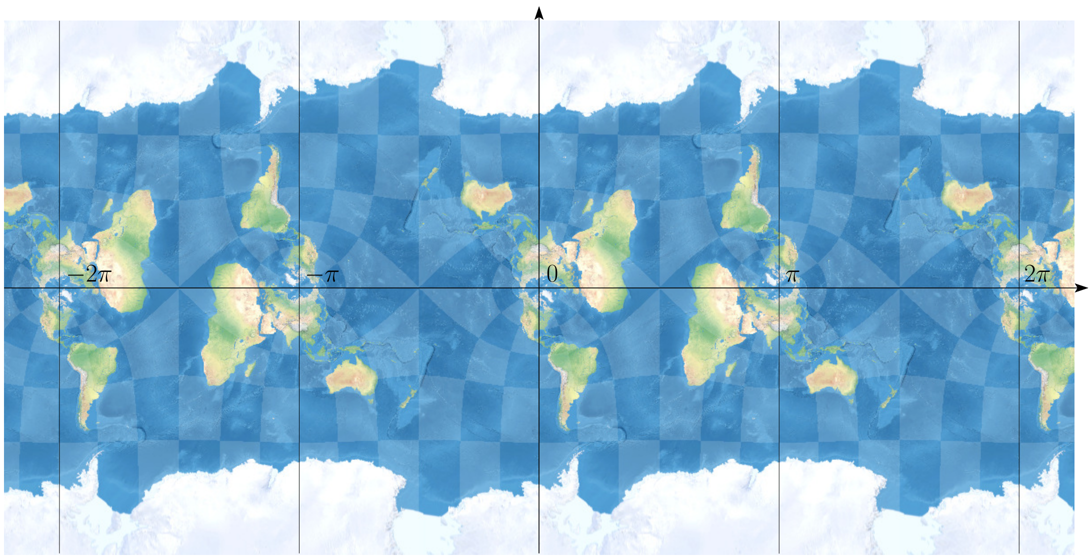
Mercator-térkép végtelen hengerre csavarva

Az e^{-iz} függvény deriváltja, $-ie^{-iz}$ sehol sem 0, ezért a Mercator-térkép mindenhol szögtartó.

Szinusz és koszinusz



$\cos z$

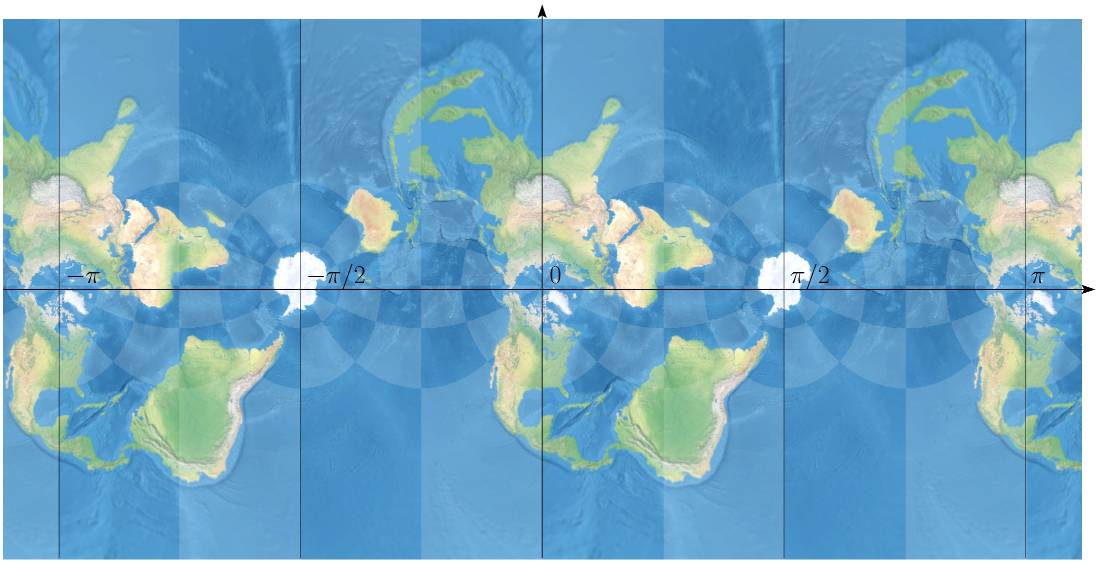


$\sin z$

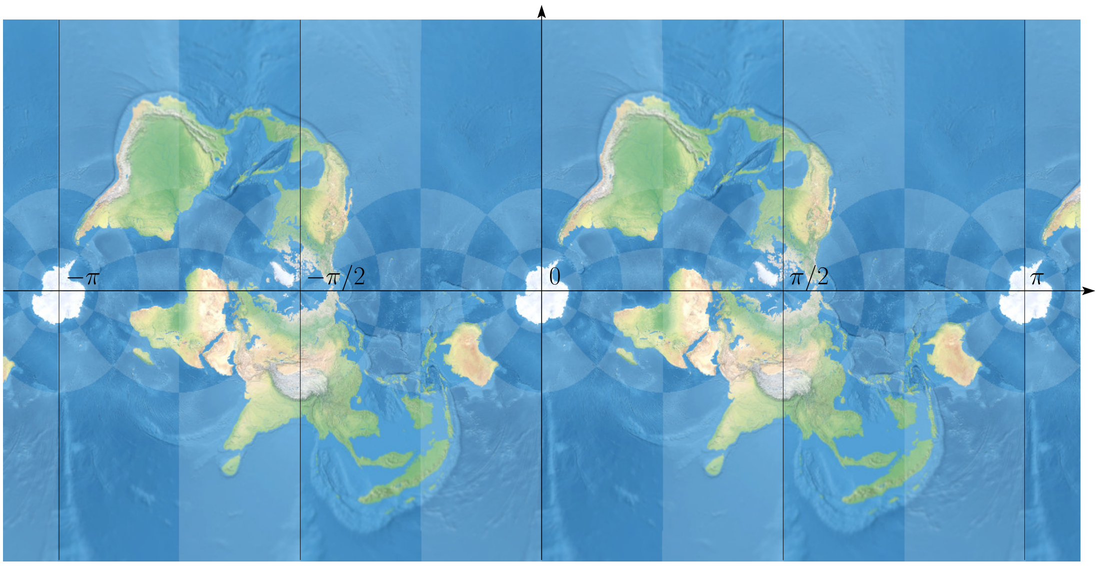
A $\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2})$ azonosság miatt a $\cos z$ és $\sin z$ képe egymás eltoltja. $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ esetén $\cos z \to \infty$ és $\sin z \to \infty$, ezért látjuk a kép alsó és felső részén a Déli-sarkot.

Érdemes megkeresni a deriváltak nullhelyeit, ahol a függvények nem szögtartók.

Tangens és kotangens



$\operatorname{tg} z$



$\operatorname{ctg} z$

A $\operatorname{ctg} z = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - z)$ azonosság miatt a $\operatorname{ctg} z$ és $\operatorname{tg} z$ képe egymás középpontos tükörképe. Ha $\operatorname{Im} z \to \infty$ esetekben a függvények határértéke $\pm i$, az i az Indiai-, a $-i$ a Csendes-óceánban van.

A tangens- és a kotangensfüggvény deriváltja sehol sem 0, cserébe vannak olyan pontok, ahol a függvények (határ)értéke ∞.