5. Komplex vonalintegrálok

Szakaszonként folytonosan differenciálható görbén vett folytonos függvény vonalintegrálja. Átírás Riemann-Stieltjes integrálokkal. Átírás Riemann-integrállá, ha a görbe folytonosan differenciálható. Átparaméterezés, additivitás, linearitás. Triviális felső becslés. Helyettesítéses integrálás. Newton-Leibniz formula.

Paraméteres görbék

Lényegében ugyanúgy, mint $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció

- Görbe: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto x(t) + y(t)i, \qquad \dot{\gamma} = \dot{x} + \dot{y}i$
- Folytonos, diffható, folytonosan diffható stb., ha $\gamma(t)$, illetve $x(t)$ és $y(t)$ folytonos, diffható, folytonosan diffható stb.
- A görbe C^1, ha (a, b)-ben folytonosan differenciálható, a-ban jobbról, b-ben balról differenciálható, és ezek a féloldali derivált értékek a derivált határértékei.
- A görbe *szakaszonként* C^1, ha véges sok C^1 görbe egymás után fűzése. (Pl. töröttvonalak.)
- A görbe hossza a beírt töröttvonalak hosszának szuprémuma: $\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\right\}$.
- Átparaméterezés: $h : [c, d] \to [a, b]$ szig. mon. növő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$
- A görbe megfordítása: $h : [c, d] \to [a, b]$ szig. mon. csökkenő bijekció; az új görbe $\gamma \circ h$
- Zárt görbe: $\gamma(a) = \gamma(b)$
- Egyszerű görbe: γ injektív.
- Jordan görbe: Olyan zárt görbe, melyre γ $[a, b)$-re megszorítva injektív.

Trivialitás

- Folytonos görbe átparaméterezései is folytonosak.
- A görbe hossza nem függ a paraméterezéstől.

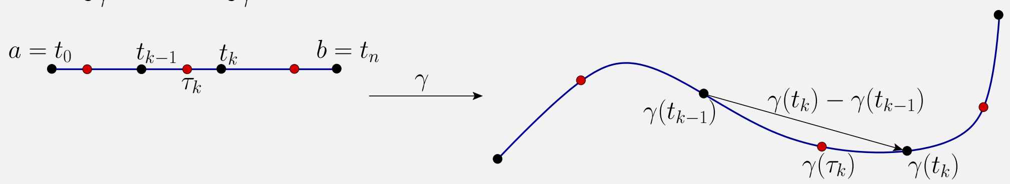
Komplex vonalintegrál

Definíció (komplex vonalintegrál)

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ folytonos görbe,és $f(z)$ olyan komplex függvény, amely értelmes γ pontjain.
Az $f(z)$ függvény komplex vonalintegrálja a γ görbén az $I \in \mathbb{C}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy az $[a,b]$ paraméterintervallum bármely, δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ felosztására és $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ paraméterértékekre

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - I \right| < \varepsilon.$$

Jele: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, $\int_\gamma f$



Tétel

Ha

- $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + y(t) \cdot i$ szakaszonként folytonosan differenciálható (szakaszonként C^1) görbe,
- és a γ képén $f(z) = u(z) + v(z)i$ folytonos,
- akkor a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ komplex vonalintegrál létezik, és
- $$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f \circ \gamma) \cdot \dot\gamma.$$

Ez itt egy komplex értékű Riemann-integrál; külön-külön integráljuk a valós és a képzetes részt:

$$\int_a^b (f\circ\gamma)\cdot\dot\gamma = \int_a^b \big((u\circ\gamma) + (v\circ\gamma)i\big)\cdot\big(\dot x + \dot y i\big)$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\Big(\big((u\circ\gamma) + (v\circ\gamma)i\big)\cdot\big(\dot x + \dot y i\big)\Big) + i\int_a^b \mathrm{Im}\Big(\big((u\circ\gamma) + (v\circ\gamma)i\big)\cdot\big(\dot x + \dot y i\big)\Big)$$

$$= \int_a^b \Big((u\circ\gamma)\dot x - (v\circ\gamma)\dot y\Big) + i\int_a^b \Big((u\circ\gamma)\dot y + (v\circ\gamma)\dot x\Big)$$

$$= \int_a^b (u\circ\gamma)\dot x - \int_a^b (v\circ\gamma)\dot y + i\int_a^b (u\circ\gamma)\dot y + i\int_a^b (v\circ\gamma)\dot x.$$

Példa

Integráljuk a $z \mapsto z$ függvényt az $y = x^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti ívén.

1. megoldás: Legyen $\gamma(t) = t + it^2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.
$\dot\gamma(t) = 1 + 2it$.

$$\int_\gamma z \,\mathrm{d}z = \int_0^1 (t+it^2)(1+2it)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t + 3it^2 - 2t^3)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + it^3 - \frac{1}{2}t^4\right]_0^1 = i.$$

A tétel bizonyítása.

$\gamma = x + y \cdot i$ szakaszonként C^1, $f = u + iv$ folytonos.
A cél: $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) \cdot \dot x(t) - v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t)\Big)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Big(u(\gamma(t)) \cdot \dot y(t) + v(\gamma(t)) \cdot \dot y(t)\Big)\,\mathrm{d}t$.

Legyen $a = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{n-1} \leqslant \tau_n \leqslant t_n = b$ egy tetszőleges felosztás.

A feloasztáshoz tartozó integrálközelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(\tau_k))\cdot\big(\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^n \Big(u\big(\gamma(\tau_k)\big)+v\big(\gamma(\tau_k)i\Big)\cdot\Big(\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big)+\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)i\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^n u\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big) - \sum_{k=1}^n v\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)$$

$$+i\sum_{k=1}^n v\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big) + i\sum_{k=1}^n u\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big).$$

Az az állítás, hogy ha a felosztást finomítjuk, akkor ez a négy összeg az $\int_a^b (u\circ\gamma)\dot x$, $\int_a^b (u\circ\gamma)\dot y$, $\int_a^b (v\circ\gamma)\dot x$, illetve $\int_a^b (v\circ\gamma)\dot y$ integrálokhoz tart.

Állítás: $\displaystyle\sum_{k=1}^n u\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big) \longrightarrow \int_a^b (u\circ\gamma)\dot x.$ (A többi három ugyanúgy megy.)

- $M = \int_a^b \big|\dot x(t)\big|\,\mathrm{d}t$ véges.
- $(u\circ\gamma)$ folytonos, tehát egyenletesen folytonos:

  $$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall t,t'\in[a,b] \quad |t-t'|<\delta \Rightarrow \big|u(\gamma(t))-u(\gamma(t'))\big| < \frac{\varepsilon}{M+1}.$$

- Ha a felosztásunk δ-nál finomabb (minden k-ra $t_k - t_{k-1} < \delta$), akkor

$$\left|\sum_{k=1}^n u\big(\gamma(\tau_k)\big)\cdot\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big) - \int_a^b u(\gamma(t))\dot x(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^n u\big(\gamma(\tau_k)\big)\int_{t_{i-1}}^{t_k}\dot x(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_k} u\big(\gamma(t)\big)\dot x(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_k}\Big(u\big(\gamma(\tau_k)\big)-u\big(\gamma(t)\big)\Big)\dot x(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_k}\Big|u\big(\gamma(\tau_k)\big)-u\big(\gamma(t)\big)\Big|\cdot\big|\dot x(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_k}\frac{\varepsilon}{M+1}\cdot\big|\dot x(t)\big|\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{M+1}\underbrace{\int_a^b\big|\dot x(t)\big|\,\mathrm{d}t}_{M} < \varepsilon.$$

- Tehát: minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely, δ-nál finomabb felosztás esetén, $\sum_{k=1}^{n} u\big(\gamma(\tau_k)\big) \cdot \big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)$ és $\int_a^b (u \circ \gamma)\dot{x}$ távolsága kisebb, mint ε.

Tétel

- Ha γ_1 a γ egy átparaméterezése, akkor $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$. (Ha az egyik létezik, akkor a másik is.)
- Ha γ a γ_1 és γ_2 egymás után fűzése, akkor $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_1} f$. (Ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is.)
- Ha γ_1 a γ-nak megfordítása, akkor $\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$.
- $\int_\gamma 1 \,\mathrm{d}z = \gamma(b) - \gamma(a)$
- Ha $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ és $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$ létezik és c, d konstansok, akkor

$$\int_\gamma (c \cdot f(z) + d \cdot g(z))\,\mathrm{d}z = c \cdot \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + d \cdot \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, mint valós vonalintegráloknál.

Tétel

(a) Ha γ szakaszonként C^1 görbe, és f folytonos, akkor a $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ vonalintegrál létezik.

(b) Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, és f folytonos, akkor $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t$.

Bizonyítás. Legyen $\gamma = x + yi$ és $f = u + vi$. (a) Az integrákozelítő összeg

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\Big(u\big(\gamma(\tau_j)\big) + v\big(\gamma(\tau_j)i\Big)}_{f(\gamma(\tau_j))} \cdot \underbrace{\Big(\big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) + \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)i\Big)}_{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) + i \sum_{j=1}^{n} u\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big)$$

$$+ i \sum_{j=1}^{n} v\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(x(t_j) - x(t_{j-1})\big) - \sum_{j=1}^{n} v\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(y(t_j) - y(t_{j-1})\big).$$

Ez a négy összeg az $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t)$, az $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}y(t)$, az $\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}x(t)$, illetve az $\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}y(t)$ Riemann-Stieltjes integrál egy-egy közelítő összege.

Az $u \circ \gamma$ stb. integrandusok folytonosak, a $x(t), y(t)$ integrátorok korlátos változásúak, tehát mind a négy RS integrál létezik.

Ha a felosztás elég finom, akkor mind a négy közetítő összeg $\varepsilon/4$-nél közelebb lesz a megfelelő RS integrálhoz. Tehát a vonalintegrál is létezik, és

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) + i\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}y(t) + i\int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) - \int_a^b v(\gamma(t))\mathrm{d}y(t).$$

(b) Ha $x(t)$ és $y(t)$ is szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor mind a négy RS integrál átírható Riemann-integrállá, pl. $\int_a^b u(\gamma(t))\mathrm{d}x(t) = \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t$, és

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_a^b u(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b u(\gamma(t))\dot{y}(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(\gamma(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t - \int_a^b v(\gamma(t))\dot{y}(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) + v(\gamma(t))i\Big)\cdot\Big(\dot{x}(t) + \dot{y}(t)i\Big)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t.$$

Tétel

Ha γ_1 a γ egy átparaméterezése, akkor

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f.$$

(Ha az egyik létezik, akkor a másik is.)

Bizonyítás. Legyen $\gamma_1 = \gamma \circ h$, $h : [c, d] \to [a, b]$ szig. mon. növő, egyenletesen folytonos. Tegyük fel, hogy $\int_\gamma f$ létezik.

Vegyünk egy tetszőleges ε-t; ehhez létezik a definíciónak megfelelő δ. Ehhez a δ-hoz létezik $\eta > 0$, hogy $u, v \in [c, d]$, $|u - v| < \eta$ esetén $|h(u) - h(v)| < \delta$.

Ha $c = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = d$ egy η-nál finonabb felosztása $[c, d]$-nek, és $v_j \in [u_{j-1}, u_j]$, akkor $a = t_0 = h(u_0) < t_1 = h(u_1) < \ldots < t_n = h(u_n)$ egy δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nek, $\tau_j = h(v_j) \in [t_{j-1}, t_j]$, és

$$\left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma_1(v_j)\big)\cdot\big(\gamma_1(u_j) - \gamma_1(u_{j-1})\big) - I\right| = \left|\sum_{j=1}^n f\big(\gamma(\tau_j)\big)\cdot\big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big) - I\right| < \varepsilon.$$

5.1. Tétel

- Ha γ a γ_1 és γ_2 egymás után fűzése, akkor

  $$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_1} f.$$

  (Ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is.)

- Ha γ_1 a γ-nak megfordítása, akkor $\int_{\gamma_1} f = -\int_\gamma f$.

- $\int_\gamma 1\mathrm{d}z = \gamma(b) - \gamma(a)$

- Ha $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ és $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$ létezik és c, d konstansok, akkor

  $$\int_\gamma (c\cdot f(z) + d\cdot g(z))\mathrm{d}z = c\cdot\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + d\cdot\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, mint valós vonalintegráloknál.

A vonalintegrál egy alternatív definíciója

Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ szakaszonként C^1

- A $\mathrm{d}\gamma$ egy korlátos változású Lebesgue–Stieltjes mérték, a totális variációja $\ell(\gamma)$
- A vonalintegrál a $f \circ \gamma$ függvény Lebesgue–Stieltjes integrálja a $\mathrm{d}\gamma$ mérték szerint.
- Minden Borel-mérhető függvénynek értelmes a vonalintegrálja
- A vonalintegrál lineáris
- A vonalintegrál additív

Lemma (triviális becslés)

Ha a görbe pontjaiban $|f(z)| \leqslant M$, akkor

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Bizonyítás. A becslés minden integrálközelítő összegre igaz:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(\tau_j)\big) \cdot \big(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Big|f\big(\gamma(\tau_j)\big)\Big| \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} M \cdot \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| = M \cdot \sum_{j=1}^{n} \big|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\big| \leqslant M \cdot \ell(\gamma).$$

Tétel

Legyen γ szakaszonként C^1 görbe; $f_1, f_2, \dots,$ a γ pontjaiban folytonos függvények.

- Ha $f_n \to g$ egyenletesen, akkor $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma g$.
- Ha $\sum f_n = g$ egyenletesen, akkor $\sum \int_\gamma f_n = \int_\gamma g$.

Bizonyítás. Az egyenletes konvergencia miatt g is folytonos.

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma g\right| = \left|\int_\gamma (f_n - g)\right| \leqslant \Big(\max_\gamma |f_n - g|\Big) \cdot \ell(\gamma) \to 0.$$

Miért szabad vonalintegrálokat felcserélni?

Előfordul, hogy valamilyen kétváltozós $f(z, w)$ függvényt mindkét változója szerint vonalintegrálunk egy-egy görbén, és szükségünk van a két integrál felcserélésére:

$$\int_{z\in\gamma_1} \left(\int_{w\in\gamma_2} f(z,w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z \stackrel{?}{=} \int_{w\in\gamma_2} \left(\int_{z\in\gamma_1} f(z,w)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w$$

Ha mindkét görbe folytonosan differenciálható, (speciálisan ha mindkettő egyenes szakasz), $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ és $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$, akkor az Analízis3-ból tanultak működnek: a lebontási tétel miatt

$$\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2} f(z,w)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b}\left(\int_{u=c}^{d} f\big(\gamma_1(t),\gamma_2(u)\big)\dot\gamma_2(u)\mathrm{d}u\right)\dot\gamma_1(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_{(t,u)\in[a,b]\times[c,d]} f\big((\gamma_1(t),\gamma_2(u)\big)\dot\gamma_1(t)\dot\gamma_2(u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u.$$

A lebontási tétel bizonyítását is meg lehetne ismételni Riemann- helyett vonalintegrálokkal.

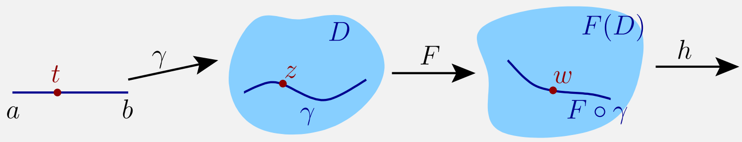
A Fubini-tétellel, mint atomtöltetű ágyúval is le lehet lőni a kérdést. A rektifikálható görbe egyben (véges) komplex mértéktér is, a totális variáció az ívhossz, a vonalintegrál a komplex mérték szerinti integrál.

A Fubini-tételhez két dolgot kell ellenőriznünk: az integrandus, a $f(z,w)$ függvény mérhető és korlátos (mert folytonos), továbbá $|f|$-nek a totális variációk szerinti integrálja véges:

$$\int_{z\in\gamma_1}\left(\int_{w\in\gamma_2}\big|f(z,w)\big||\mathrm{d}w|\right)|\mathrm{d}z| \leqslant \ell(\gamma_1)\cdot\ell(\gamma_2)\cdot\max\big|f(z,w)\big| < \infty.$$

Newton–Leibniz formula

Tétel (helyettesítéses integrálás)



Legyen $D\subset\mathbb{C}$ tartomány, $\gamma:[a,b]\to D$ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, $F:D\to\mathbb{C}$ folytonosan differenciálható, továbbá h az $F\circ\gamma$ pontjain folytonos függvény. Ekkor

$$\int_{F\circ\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma h(F(z))\cdot F'(z)\,\mathrm{d}z \qquad \text{(Szóval, ha } w=F(z)\text{, akkor } \mathrm{d}w = F'(z)\,\mathrm{d}z.\text{)}$$

Bizonyítás. $F\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ is szakaszonként C^1.

$$\int_{F\circ\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)'\,\mathrm{d}t = \int_a^b h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot\Big(F'\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma h\Big(\big(F(z)\big)\cdot F'(z)\Big)\,\mathrm{d}z = \int_a^b\left(h\Big(F\big(\gamma(t)\big)\Big)\cdot F'\big(\gamma(t)\big)\right)\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t,$$

a két integrál ugyanaz.

Tétel (Newton–Leibniz formula komplex vonalintegrálokra [Isaac Newton, angol, 1642–1727; Gottfried Wilhelm Leibniz, német, 1646–1716])

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány,
$\gamma : [a, b] \to D$ szakaszonként C^1 görbe,
$F : D \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Bizonyítás. Helyettesítéses integrálás a konstans $h = 1$ függvénnyel:

$$\int_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma h(F(z))\cdot F'(z)\,\mathrm{d}z = \int_{F\circ\gamma} h(w)\,\mathrm{d}w = \int_{F\circ\gamma} 1\,\mathrm{d}w = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Példa (újra)

Integráljuk a $z \mapsto z$ függvényt az $y = x^2$ parabola 0 és $1 + i$ közötti ívén.

2. megoldás: Mivel $z = (\frac{1}{2}z^2)'$, a Newton–Leibniz formula szerint

$$\int_\gamma z,\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\gamma(1)^2 - \frac{1}{2}\gamma(0)^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 - \frac{1}{2}0^2 = i.$$

Ívhossz szerinti integrál

Az ívhossz szerinti integrál ugyanaz, mint kétváltozós valósban, ezért nem definiáltuk külön.

Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ elég sima görbe, akkor a szokásos átírás Riemann-integrállá

$$\int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_{t=a}^{b} = f\big(\gamma(t)\big)\cdot\big|\dot\gamma(t)\big|\mathrm{d}t.$$

Ívhossz szerinti integrál az egységkörvonalon

Az egységkörvonal szokásos paraméterezése $z = \gamma(t) = e^{it}$; amikor a vonalintegrált és az ívhossz szerinti integrált átírjuk Riemann-integrállá,

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it})\cdot ie^{it}\mathrm{d}t,$$

illetve

$$\int_{|z|=1} f(z)|\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z)|\mathrm{d}z| = \int_{t=0}^{2\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t;$$

ebből is leolvashatjuk a jelöléseket, hogy $\mathrm{d}t = |\mathrm{d}z|$ és $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t = iz|\mathrm{d}z|$.

Geometriailag, amikor a körvonalon a z pontból a $z + \mathrm{d}z$ pontba lépünk, a $\mathrm{d}z$ iránya iz, a hossza $|\mathrm{d}z|$, vagyis

$$\mathrm{d}z = iz|\mathrm{d}z|, \qquad |\mathrm{d}z| = \frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Ezeket a képleteket akkor használhatjuk, amikor vonalintegrált akarunk ívhossz szerinti integrállá átírni vagy fordítva.