8. Függvénysorozatok, függvénysorok és paraméteres integrálok

Holomorf függvények lok. egyenletes limesze holomorf. Ugyanez sorokkal és paraméteres integrálokkal. Ha lokálisan egyenletesen korlátos függvények sorozata egy sűrű halmazon pontonként konvergens, akkor lok. egyenletesen konvergens. Vitali-Montel tétel.

Holomorf függvények egyenletes limesze

Tétel (Weierstrass)

Holomorf függvények lokálisan egyenletes limesze holomorf, avagy:
Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f_n'(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

Emlékeztetőül, "lokálisan egyenletesen":

- Minden pontnak van olyan környezete, ahol, vagy:
- Minden kompakt részhalmazon.

Következmény

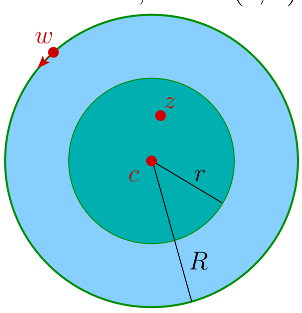
Lokálisan egyenletesen konvergens sorozatokat és sorokat akárhányszor szabad tagonként deriválni.

Bizonyítás. (a) Morera: ahhoz, hogy $g(z) = \lim f_n(z)$ holomorf legyen, elég, ha g folytonos, és bármely D-beli Δ zárt háromszöglemez kerületén 0 a vonalintegrálja.

A Δ háromszöglemez kompakt, így ezen a halmazon $f_n \to g$ egyenletesen. Folytonos függvények egyenletes limesze folytonos, ezért g is folytonos; így biztosan létezik g vonalintegrálja a háromszögvonalon.

$$\int_\Delta g(z)\mathrm{d}z = \int_\Delta \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_\Delta f_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

(b) Legyen $\overline{B}(c, R) \subset D$, $0 < r < R$, $z \in B(c, r)$.



Bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy $n > n_0$ esetén $\max\limits_{|w-c|=R} |f_n(w) - g(w)| < \varepsilon$.

Bármely $z \in B(c,r)$-re

$$\left|f_n'(z) - g'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{g(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)-g(w)}{\big((w-c)-(z-c)\big)^2}\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|w-c|=R}\frac{\left|f_n(w)-g(w)\right|}{\big(|w-c|-|z-c|\big)^2}\,|\mathrm{d}w|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R = \frac{R}{(R-r)^2}\cdot\varepsilon.$$

Ez minden ε-ra igaz, tehát $f_n'(z) \to g'(z)$ egyenletesen a $B(c,r)$ körben.

Tehát, minden c-nek van olyan környezete, ahol $f_n' \to g'$ egyenletesen, vagyis $f_n' \to g'$ lokálisan egyenletesen.

Példa ((Euler–)Riemann-zeta függvény)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (\operatorname{Re} s > 1)$$

(Hagyományosan $s = \sigma + it$)

Ha $\sigma_0 > 1$, akkor a $\sigma \geqslant \sigma_0$ félsíkban $\sum \dfrac{1}{n^{\sigma_0}}$ közös konvergens majoráns, tehát a sor egyenletesen konvergens.

A Weierstrass-tétel szerint $\zeta(s)$ holomorf a $\sigma > 1$ nyílt félsíkban, és

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\log n}{n^s}.$$

($\sigma \leqslant 1$ esetén a sor divergens.)

Pontonkénti konvergenciából egyenletes konvergencia

Lemma

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és egyenletesen korlátosak (tehát van olyan K, hogy $|f_n(z)| \leqslant K$ minden n-re és minden $z \in D$-re), és egy sűrű $S \subset D$ halmazon $f_n(z)$ pontonként konvergens, akkor az $f_n(z)$ sorozat lokálisan egyenletesen konvergens.

Bizonyítás. Vegyünk egy $c \in D$ pontot és körülötte egy kört: $B(c, R+\varepsilon) \subset D$.

Legyen $r = \frac{R}{2}$ és $|f_n(z)| \leqslant K$ minden n-re és z-re.

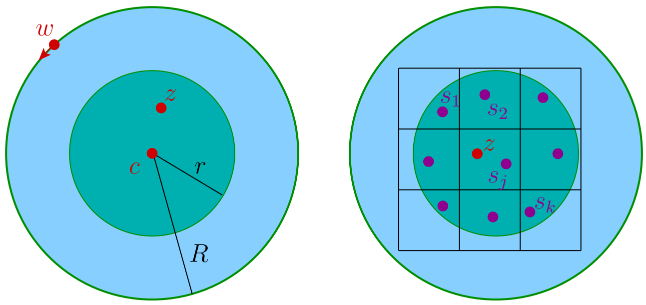
Előkészület. Bármely $z \in B(c,r)$-re és bármely $n \in N$-re

$$\left|f_n'(z)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=R}\frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{K}{(R-r)^2}\cdot 2\pi R = \frac{4K}{R},$$

ezért bármely $z_1, z_2 \in B(c,r)$ pontokra

$$\big|f_n(z_1) - f_n(z_2)\big| \leqslant \frac{4K}{R} \cdot |z_1 - z_2|.$$

(A kis körön belül $f_1, f_2, \ldots$ egyenletesen Lipschitz.)



Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

A $B(c,r) \cap S$ halmazból válasszunk ki véges sok pontot: $s_1, \ldots, s_k$-t úgy, hogy ezek ε sugarú környezetei lefedjék $B(c,r)$-et.

Van olyan n_0, hogy bármely $n, m \geqslant n_0$-ra és minden $1 \leqslant j \leqslant k$-ra $\big|f_n(s_j) - f_m(s_j)\big| < \varepsilon$. (Mindegyik j-hez van ilyen küszöb; vesszük a maximumot.)

Most tekintsünk egy tetszőleges $z \in B(c,r)$ pontot.

Ehhez van egy s_j pont, amelyre $|z - s_j| < \varepsilon$. Ezért

$$\begin{gathered}\big|f_n(z) - f_m(z)\big| \leqslant \\ \leqslant \big|f_n(z) - f_n(s_j)\big| + \big|f_m(s_j) - f_m(z)\big| + \big|f_n(s_j) - f_m(s_j)\big| \leqslant \\ < \frac{4K}{R}|z - s_j| + \frac{4K}{R}|z - s_j| + \varepsilon < 2 \cdot \frac{4K}{R}\varepsilon + \varepsilon = \left(\frac{8K}{R} + 1\right)\varepsilon.\end{gathered}$$

Tehát: Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0, hogy minden $n, m > n_0$ és bármely $z \in B(c,r)$ esetén $\big|f_n(z) - f_m(z)\big| \leqslant \left(\frac{8K}{R} + 1\right)\varepsilon$.

Az $f_n(z)$ függvénysorozat egyenletesen konvergens $B(c,r)$-en.

Tétel (Vitali–Montel [Giuseppe Vitali, olasz, 1875–1932; Paul Antoine Aristide Montel, francia, 1876–1975])

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor ezek közül kiválasztható lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

V.ö. Bolzano-Weierstrass tétel: Minden korlátos számsorozatnak van konvergens részsorozata.

V.ö. Arzelà–Ascoli tétel: Ha $f_1, f_2, \ldots : [a,b] \to \mathbb{R}$ egyenletesen korlátosak és egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall n \;\; \forall x, y \in [a,b] \;\; \Big(\big(|x-y| < \delta\big) \Rightarrow \big(|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon\big)\Big),$$

akkor kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat.
Bizonyítás. Legyen $s_1, s_2, \ldots$ egy sűrű sorozat D-ben.

A Bolzano–Weierstrass tétel miatt miatt van olyan $N_1 = (n_{1,1}, n_{1,2}, n_{1,3}, \ldots)$ sorozat, amelyre az $f_{n_{1,k}}(s_1)$ sorozat konvergens.

Ennek van olyan $N_2 = (n_{2,1}, n_{2,2}, n_{2,3}, \ldots)$ részsorozata, amelyre az $f_{n_{2,k}}(s_2)$ sorozat is konvergens.

Ezt ismételve kapjuk részsorozatok egy sorozatát; minden ℓ-re az $f_{n_{\ell,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Átlósan kiválasztjuk az $n_{k,k}$ elemeket.

$$\begin{array}{cccccc}
N_1\colon & n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & n_{1,4} & \cdots \\
N_2\colon & n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & n_{2,4} & \cdots \\
N_3\colon & n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & n_{3,4} & \cdots \\
N_4\colon & n_{4,1} & n_{4,2} & n_{4,3} & n_{4,4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Az $(n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, \ldots)$ sorozat mindegyik N_j-nek részsorozata az első néhány elem kivételével, ezért bármelyik ℓ-re az $f_{n_{k,k}}(s_\ell)$ sorozat konvergens.

Tehát, az $f_{n_{k,k}}(z)$ sorozat egyenletesen korlátos és az $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ sűrű halmazon pontonként konvergens, tehát a Lemma miatt a teljes D tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Paraméteres integrálok

Tétel

Legyen D tartomány, $f : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ folytonos, minden rögzített $x \in [a,b]$-re $z \mapsto f(x,z)$ holomorf. Ekkor az

$$F(z) = \int_{x=a}^{b} f(x,z)\mathrm{d}x$$

paraméteres integrál is holomorf és

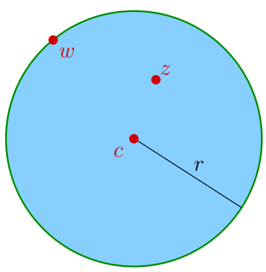
$$F'(z) = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Ugyanaz, csak szumma helyett integrállal.

(a) Bármely $\Delta \subset D$ háromszöglemez körül

$$\int_{\Delta} F(z)\mathrm{d}z = \int_{z\in\Delta} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,z)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{z\in\Delta} f(x,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} 0\mathrm{d}x = 0,$$

tehát $F(z)$ holomorf.



(b) Bármely $z \in D$ pont körül egy kis, r sugarú körben

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} F(w) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,w) \mathrm{d}x \right) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2}$$

$$= \int_{x=a}^{b} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} f(x,w) \frac{\mathrm{d}w}{(w-z)^2} \right) \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} D_2 f(x,z) \mathrm{d}x.$$

Példa (Euler-féle Gamma-függgvény)

$$\Gamma(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x \qquad (\operatorname{Re} s > 0)$$

A függvény holomorf, és

$$\Gamma'(s) = \int_{x=0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \log x \mathrm{d}x \quad (\operatorname{Re} s > 0)$$

Az előző tételt kiterjeszthetjük impproprius integrálokra, vagy vehetjük a

$$\lim_{N \to \infty} \int_{x=\frac{1}{N}}^{N} x^{s-1} e^{-x} \mathrm{d}x$$

lokálisan egyenletesen konvergens függvénysorozatot.