9. Hatványsorba fejtés

Együtthatóformula. Hatványsorba fejtés. Analitikus függvény fogalma. Középérték-tulajdonság. $\log(1+z)$ és $(1+z)^a$ hatványsora.

Lemma

Bármely $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$ és $r > 0$ esetén

(a) $$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{ha } k\neq 0\end{cases}$$

(b) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\mathrm{d}z = \begin{cases}1 & \text{ha } k=-1\\ 0 & \text{ha } k\neq -1\end{cases}$$

Bizonyítás. A kettő ugyanaz, mert $\mathrm{d}\big(\arg(z-c)\big) = \frac{|\mathrm{d}z|}{r} = \frac{\mathrm{d}z}{i(z-c)}$. Helyettesítés: $z-c = re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

(a)
$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot r\mathrm{d}t = \frac{r^k}{2\pi r}\int_0^{2\pi} re^{kit}\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{ha } k=0\\ 0 & \text{ha } k\neq 0\end{cases}$$

(b)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}(z-c)^k\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}(re^{it})^k\cdot ire^{it}\mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{(k+1)it}\mathrm{d}t = \begin{cases}1 & \text{ha } k+1=0\\ 0 & \text{ha } k+1\neq 0\end{cases}$$

Vagy: $k \neq -1$ esetén van primitív függvény, a $\frac{z^{k+1}}{k+1}$. A $k=-1$ esetben $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{\mathrm{d}z}{z-c} = 1$.

Tétel (együtthatóformula)

Ha a $B(c,R)$ körlapon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

akkor

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w \qquad \text{minden } k\text{-ra és } 0<r<R\text{-re.}$$

Bizonyítás.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-c)^n}{(w-c)^{k+1}}\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-c)^{n-k-1}\right)\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}(w-c)^{n-k-1}\mathrm{d}w\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n-k-1=-1 \\ 0 & \text{ha } n-k-1\neq -1 \end{Bmatrix} = a_k.$$

Taylor-együttható, együtthatóformula és Cauchy-formula

Ha a $B(c,R)$ körlapon $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \qquad \text{(Taylor-együttható)}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\mathrm{d}z \qquad \text{(Együtthatóformula)}$$

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\mathrm{d}z \qquad \text{(Cauchy-formula)}$$

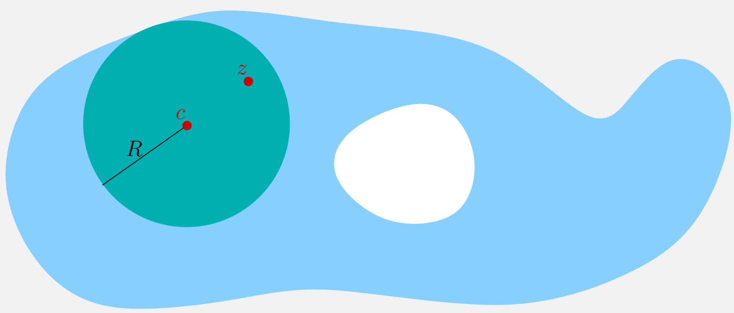
Tétel (hatványsorba fejtés)

Ha f holomorf a $B(c,R)$ körlapon, akkor ezen a körlapon a függvény hatványsorba fejthető,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n,$$

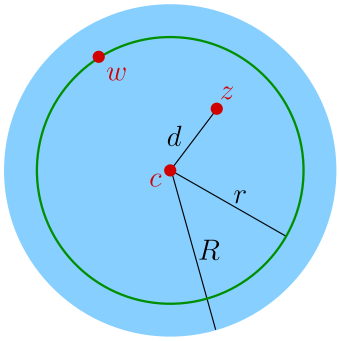
ahol

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w \qquad \text{bármely } 0<r<R\text{-re.}$$



Bizonyítás.

Legyen $z \in B(c,R)$, $d = |z-c| < r < R$, $M = \max_{|w-c|=r} |f(w)|$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-c}{w-c}}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w = \qquad \left|\frac{z-c}{w-c}\right| = \frac{d}{r} < 1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right)\mathrm{d}w \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\max_{w}\left|\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{r}\left(\frac{d}{r}\right)^n < \infty$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)\cdot(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-c)^n.$$

Definíció

$f : D \to \mathbb{C}$ *analitikus*, ha D bármely pontja körül valamekkora körben hatványsorba fejthető.

Tétel

$f : D \to \mathbb{C}$ akkor és csak akkor analitikus, ha holomorf.

Bizonyítás. $\Rightarrow$ A hatványsor összegfüggvénye holomorf.

$\Leftarrow$ Minden holomorf függvény bármely c pont körül hatványsorba fejthető, a maximális c közepű körlapon.

Példa

$f(z) = \log(1+z)$ holomorf az egységkörben, $f(0) = 0$,

$$f^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+z)^k}, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

a Taylor sor előállítja a függvényt az egységkörben:

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k.$$

Tétel (binomiális sor)

Legyen $a \in \mathbb{C}$,

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \quad \text{ha } |z| < 1$$

(Azt a hatványfüggvényt vesszük, amelyre $1^a = 1$.)

Bizonyítás. Az $f(z) = (1+z)^a = e^{a\log(1+z)}$ függvény holomorf az egységkörben,

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \frac{a(a-1)...(a-k+1)(1+z)^{a-k}}{k!} = \binom{a}{k}(1+z)^{a-k}, \qquad \frac{f^k(0)}{k!} = \binom{a}{k};$$

A 0 körüli hatványsor

$$(1+z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k \qquad (|z| < 1).$$

Példa (IMO Shortlist 2006/A2)

Definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0 = -1, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{for} \quad n \geqslant 1.$$

Mutassuk meg, hogy $a_n > 0$ minden $n \geqslant 1$-re.

Megoldás komplex függvénytani eszközökkel:

Gyors felső becslés: $|a_n| = \left| -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{n-k}|$; trivi indukcióval $|a_n| \leqslant 2^n$.

Legyen $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; ez $|z| < \frac{1}{2}$-re biztosan konvergens. A rekurzió azt jelenti, hogy

$$-1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} = G(z) \cdot \frac{-\log(1-z)}{z};$$

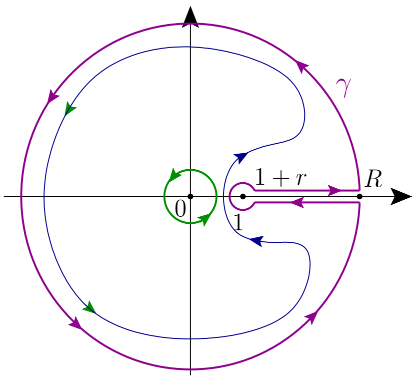
$$G(z) = \frac{z}{\log(1-z)}, \qquad G(0) = -1.$$

Ennek a függvénynek a hatványsora érdekel minket.

Megpróbálhatjuk kiszámolni a Taylor-együtthatókat... ehhez k-szor deriválni kell a 0-ban. (Hajrá.)

Vagy, írjuk fel inkább együtthatóformulát.

Kör helyett ezen a "kulcslyukgörbén" integrálunk:



$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{G(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^n \log(1-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z^n \log(1-z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R} \frac{dx}{x^n\big(\log(x-1)-\pi i\big)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R} \frac{dx}{x^n\big(\log(x-1)+\pi i\big)}$$

$$+O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right)+O\left(R\cdot\frac{1}{R^n\log R}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{1+r}^{R} \frac{2\pi i\cdot \mathrm{d}x}{x^n\big(\log(x-1)-\pi i\big)\big(\log(x-1)+\pi i\big)} + O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{R^{n-1}\log R}\right)$$

$$= \int_{1+r}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\big(\log^2(x-1)+\pi^2} + O\left(r\cdot\log\frac{1}{r}\right) + O\left(R\cdot\frac{1}{R^n\log R}\right)$$

Ha $r \to 0$ és $R \to \infty$:

$$a_n = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n\big(\pi^2+\log^2(x-1)\big)} > 0.$$