10. A hatványsorba fejtés következményei

Gyöktényezők kiemelése, gyök multiplicitása. Unicitástétel. Lokális aszimptotikus viselkedés. Maximum-elv.

Tétel (középérték-tulajdonság)

Ha $f(z)$ holomorf a $\overline{B}(c,R)$ zárt körlapon (tehát holomorf egy kicsivel nagyobb körben), akkor

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = f(c)$$

vagyis $f(z)$ átlaga a körvonalon megegyezik a középpontban felvett értékkel.

Bizonyítás. Legyen $f(z)$ c körüli hatványsora $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)|\mathrm{d}z| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{|z-c|=r}(z-c)^n\,|\mathrm{d}z|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left\{\begin{matrix} 1 & \text{ha } n=0 \\ 0 & \text{ha } n>0\end{matrix}\right\} = a_0 = f(c).$$

Tétel (a gyöktényező kiemelhető)

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.

Ezek ekvivalensek:

(a) $f(c)=f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(m-1)}(c)=0$;

(b) $a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=0$;

(c) $f(z)=(z-c)^m\cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel.

Bizonyítás. $(a)\Leftrightarrow(b)$, mert $a_k=\dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$;

$(b)\Leftrightarrow(c)$ a $g(z)=\sum_{k=m}^{\infty} a_k(z-c)^{k-m}$ függvénnyel.

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, a c körüli hatványsora $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.
Azt mondjuk, hogy az $f(z)$-nek a c pont m-szeres gyöke, ha:

(a) $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0$ és $f^{(m)}(c) \neq 0$, avagy

(b) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ és $a_m \neq 0$, avagy

(c) $f(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$ egy c-ben holomorf $g(z)$ függvénnyel, és $g(c) \neq 0$.

Tétel (unicitástétel; [unicitás=egyértelműség])

Legyen D tartomány, $f, g, h : D \to \mathbb{C}$ holomorf, $z_1, z_2, \ldots \in D$ olyan konvergens sorozat, hogy $z_n \to \zeta \in D$ és $z_n \neq \zeta$.

(a) Ha $f(z_n) = 0$ minden n-re, akkor f az egész D-n konstans 0.

(b) Ha $g(z_n) = h(z_n)$ minden n-re, akkor $g = h$ az egész D-n.

Avagy, a függvény értékei bármelyik, D belsejében torlódó sorozat mentén meghatározzák a függvényt; bármely értéksorozathoz legfeljebb egy függvény létezik.

Bizonyítás. Elég az (a) állítást igazolni, ebből a (b) állítás az $f = g - h$ választással következik.

Legyen $Z = \{w \in D : f(w) = 0\}$ az f gyökeinek halmaza;
$Z_1 = Z' \cap D$, a gyökök D-beli torlódási pontjainak halmaza.
A feltétel szerint $\lim z_n \in Z_1$, tehát Z_1 nemüres.

Az f folytonos, ezért a gyökök torlódási pontjai is gyökök: ha $w_1, w_2, \ldots$ gyökök és $\lim\limits_{n\to\infty} w_n \in D$, akkor

$$f\big(\lim_{n\to\infty} w_n\big) = \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezért $Z_1 \subset Z$.

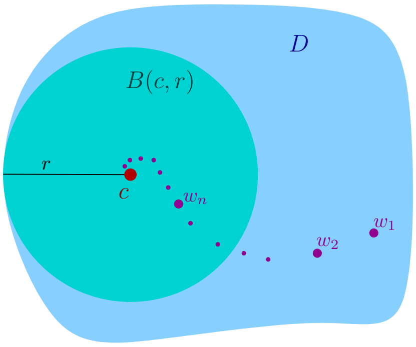
A Z_1 halmaz D-ben relatív zárt, mert Z' zárt (torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont).

Meg fogjuk mutatni, hogy Z_1 nyílt is.

Állítás: Z_1 nyílt, vagyis $\forall c \in Z_1\ \exists r > 0\ B(c, r) \subset Z_1$.

Vegyünk egy tetszőleges $c \in Z_1$ pontot; a c körül a maximális $B(c, r)$ körben legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$.
Azt akarjuk igazolni, hogy $a_0 = a_1 = \ldots = 0$; ha ez igaz, akkor $B(c, r)$-ben f konstans 0, a körben minden pont gyök, és minden pont gyökök torlódási pontja, és így $B(c, r) \subset Z_1$.

Indukció. Legyen a_m az első olyan együttható, amiről még nem bizonyítottuk, hogy 0, tehát $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ már megvan, és vizsgáljuk a_m-et. (Ha $m = 0$, akkor a feltétel üres.)



Mivel c torlódási pontja Z-nek, vannak olyan $w_1, w_2, \ldots \in Z$ pontok, hogy $w_n \neq c$ és $w_n \to c$.

A $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^{k-m} = \dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$ függvény szintén holomorf a $B(c,r)$ körben, folytonos c-ben, és $g(w_n) = \dfrac{f(w_n)}{(w_n-c)^m} = 0$. Tehát,

$$a_m = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Ezek után Z_1 az összefüggő nyílt D-nek nemüres, egyszerre nyílt és relatív zárt része, tehát a teljes D, de akkor $D = Z_1 \subset Z \subset D$ miatt $Z = D$, vagyis f konstans 0.

Következmény (végtelen rendben eltűnő függvény)

Legyen $f(z)$ holomorf a D tartományon.
Ha valamely pontban $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f konstans 0.

Bizonyítás. Ha $f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = 0$, akkor f c körüli hatványsora a konstans 0; a konvergenciakörben, majd a teljes tartományon a függvény konstans 0.

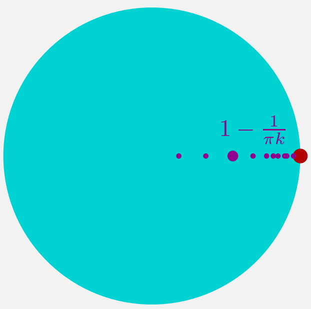
Következmény

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor az f minden gyökének véges a multiplicitása.

Kérdés

Legyen az egységkörben $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$.

A függvény gyökei $1 - \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.



Miért nem mond ez ellent az unicitástételnek?

Válasz: Végtelen sok gyök van, de csak a határhoz torlódnak.

Azonosságok, még egyszer

Az unicitástétel segítségével bizonyítás nélkül átvihetjük a valósból ismert azonosságokat komplexre.

Például a valós számok körében $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; ez automatikusan érvényes marad a komplex számok körében is; az egyetlen apró technikai gond, hogy itt kétváltozós komplex függvényekről van szó. Ezen úgy segíthetünk, hogy két lépésben, egyesével cseréljük a valós változókat komplexre.

Először rögzítsük az x valós számot, az y helyére írjuk a w komplex változót és tekintsük az

$$\sin(x+w) \stackrel{?}{=} \sin x \cos w + \cos x \sin w \tag{1}$$

egyenletet. Mindkét oldalon a w változó egy-egy egészfüggvénye áll, és az w valós értékeire az egyenlet teljesül. A valós w értékek persze torlódnak a sík belsejében, tehát az unicitástétel szerint a két függvény ugyanaz; az (1) egyenlet minden komplex w-re teljesül.

Most pedig rögzítsük a w komplex számot, és cseréljük ki az eddigi valós x-et egy z komplex változóra:

$$\sin(z+w) \stackrel{?}{=} \sin z \cos w + \cos z \sin w. \tag{2}$$

Most is a két oldal egy-egy egészfüggvénye z-nek, és láttuk, hogy a két oldal egyenlő a z bármely valós értéke esetén. Az unicitástételt újra alkalmazva azt kaptuk, hogy a (2) minden komplex z-re igaz.

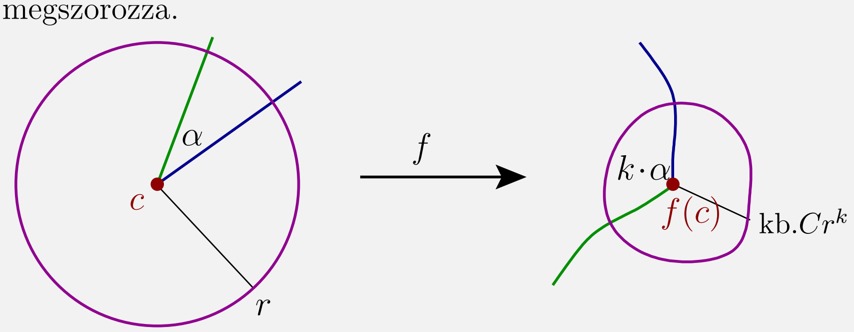
Érdemes elgondolkodni azon, hogy ez a módszer mennyiben használható a logaritmus és az exponenciális függvények esetében. A logaritmus esetében maga a függvény létezése a gond, a $\log(zw) = \log z + \log w$ egyenletet nem tudjuk elég sok z, w párra értelmezni.

Következmény (lokális aszimptotikus viselkedés)

Legyen $f(z)$ holomorf a c pontban, $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0$ és $f^{(k)}(c) \neq 0$.
A hatványsorba fejtés miatt a c közelében

$$f(z) - f(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (z-c)^k + O\big(|z-c|^{k+1}\big),$$

tehát a függvény kicsiben körtartó, de nem szögtartó: a c csúcsú szögeket k-val megszorozza.



Tétel (maximum-elv)

Ha $f(z)$ holomorf, nem konstans a D tartományon, akkor:

(a) $|f(z)|$-nek nem létezik lokális maximuma.

(b1) Ha $z_1, z_2, \ldots \in D$, $\lim z_n = w$, és $|f(z_n)| \to \sup |f|$, akkor w a D határán van.

(b2) Ha D korlátos, és f folytonos a D lezártján, akkor $|f|$ a maximumát csak a határon veszi fel.

Bizonyítás. Ha $c \in D$, és $\overline{B}(c,r) \subset D$, akkor a középérték-tulajdonság szerint

$$f(c) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|;$$

$$\big|f(c)\big| = \left|\frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} f(z)\,|\mathrm{d}z|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-c|=r} \big|f(z)\big| \cdot |\mathrm{d}z| \leqslant \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|.$$

Egyenlőség csak akkor lehetne, ha f iránya és nagysága is állandó lenne a körvonalon; de akkor az unicitástétel miatt f konstans lenne.

Tehát, akármilyen kicsi r-re

$$\big|f(c)\big| < \max_{|z-c|=r} \big|f(z)\big|;$$

az $|f|$-nek nem lehet lokális maximuma c-ben.

Kérdés (Van-e minimum-elv?)

- Ha $f(c) = 0$, akkor $|f(z)|$-nek c lokális minimumhelye.
- Ha $f(c) \neq 0$, és c az $|f(z)|$-nek lokális minimumhelye, akkor c az $|1/f(z)|$-nek lokális maximumhelye, tehát f konstans.

Ha f-nek nincs gyöke, akkor van minimum-elv is.

Tétel (Schwarz-lemma)

Ha $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorf és $f(0) = 0$, akkor

(a) $|f'(0)| \leqslant 1$;

(b) $z \neq 0$ esetén $|f(z)| \leqslant |z|$;

(c) Ha az fentiekben egyetlen pontban is egyenlőség van, akkor $f(z)$ egy 0 körüli forgatás: $f(z) = cz$ valamilyen $|c| = 1$-gyel.

Bizonyítás. Az f-nek a 0 gyöke, tehát $f(z) = g(z) \cdot z$ valamilyen holomorf g függvénnyel.

A 0-ban $f'(0) = g(0)$; azt kell igazolni, hogy $|g| \leqslant 1$.

Legyen $z_1, z_2, \ldots \in \mathbb{D}$ olyan pontok, hogy $|g(z_n)| \to \sup |g|$. Ha g nem konstans, akkor a maximum-elv miatt $|z_n| \to 1$. Ha g konstans, akkor mi választjuk a pontokat így.

$$1 \geqslant |f(z_n)| = |g(z_n)| \cdot |z_n| \to \sup |g| \cdot 1 = \sup |g|$$

Tehát az egész körlapon $|g| \leqslant 1$.

Ha (a)-ban vagy (b)-ben, bármelyik belső pontban egyenlőség van, akkor ott $|g| = 1$. Az maximum-elv szerint ez csak úgy lehet, ha g konstans, $g(z) = c$; ez a konstans persze egységnyi, és akkor $f(z) = cz$ egy forgatás.