11. Egészfüggvények

Együtthatóbecslés. Liouville-tétel. Nem konstans egészfüggvény értékkészlete sűrű. Kis Picard-tétel (csak kimondani). A polinomok jellemzése nagyságrendekkel. Bizonyítás az algebra alaptételére.

Lemma (együtthatóbecslés)

Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ egészfüggvény, és legyen bármely $r > 0$-ra

$$M(r) = \max_{|z|=r} \left|f(z)\right|.$$

Ekkor bármely n indexre és $r > 0$ esetén

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Bizonyítás. Együtthatóformula, majd triviális becslés:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z \right| \leqslant \max_{|z|=r} \left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}.$$

Tétel (Liouville-tétel)

Ha egy egészfüggvény korlátos, akkor konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, a korlát $|f(z)| \leqslant M$. Az együtthatóbecslés szerint $r > 0$-ra és $n \geqslant 1$-re

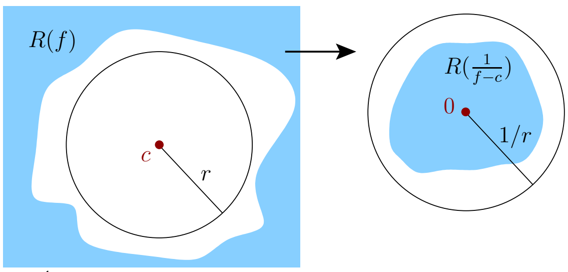
$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Az $r \to \infty$ határátmenetből azt kapjuk, hogy bármely $n \geqslant 1$-re $|a_n| = 0$, tehát f konstans.

Következmény

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor az értékkészlete sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy az értékkészlet nem sűrű, vagyis van egy $B(c, r)$ kör, amelyben a függvény nem vesz fel értéket: $\left|f(z) - c\right| \geqslant r$ minden z-re.



Legyen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$; ez egy egészfüggvény és

$$\left|g(z)\right| = \frac{1}{\left|f(z) - c\right|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

A Liouville-tétel miatt $g(z)$ konstans, de akkor $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + c$ is konstans.

Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

A tételt később bizonyítjuk.

Példák

- Az lehetséges, hogy egy egészfüggvény nem vesz fel minden komplex számot; például az e^z értékkészlete $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
- A $\sin z$ függvény minden értéket felvesz, az értékkészlete a teljes $\mathbb{C}$.

A Liouville-tétel tovább erősíthető:

Tétel

Ha $f(z)$ egészfüggvény és $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$, akkor $f(z)$ konstans.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. $n \geqslant 1$ és $r > 1$ esetén

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \leqslant \frac{M(r)}{r}; \to 0 \quad \text{ha } r \to \infty.$$

Tétel (a polinomok jellemzése a nagyságrendjükkel)

Ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z^{n+1}} = 0$, akkor $f(z)$ egy legfeljebb n-edfokú polinom.

Bizonyítás. Legyen a 0 körüli hatványsor $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Az együtthatóbecslés szerint $r > 1$-ra és $k \geqslant n+1$-re

$$|a_k| \leqslant \frac{M(r)}{r^k} \leqslant \frac{M(r)}{r^{n+1}} \to 0 \quad \text{ha } r \to \infty.$$

Tehát, $|a_k| = 0$ minden $k = n+1, n+2, \ldots$-re, vagyis $f(z)$ legfeljebb n-edfokú polinom.

Tétel (az algebra alaptétele)

Minden nem konstans komplex polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás. Átfogalmazva: Ha egy polinomnak nincs gyöke, akkor konstans.

Tegyük fel, hogy $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ polinom, $a_n \neq 0$ és nincs gyöke.

Vizsgáljuk az $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ egészfüggvényt.

Az f folytonos, és véges határértéke van ∞-ben:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

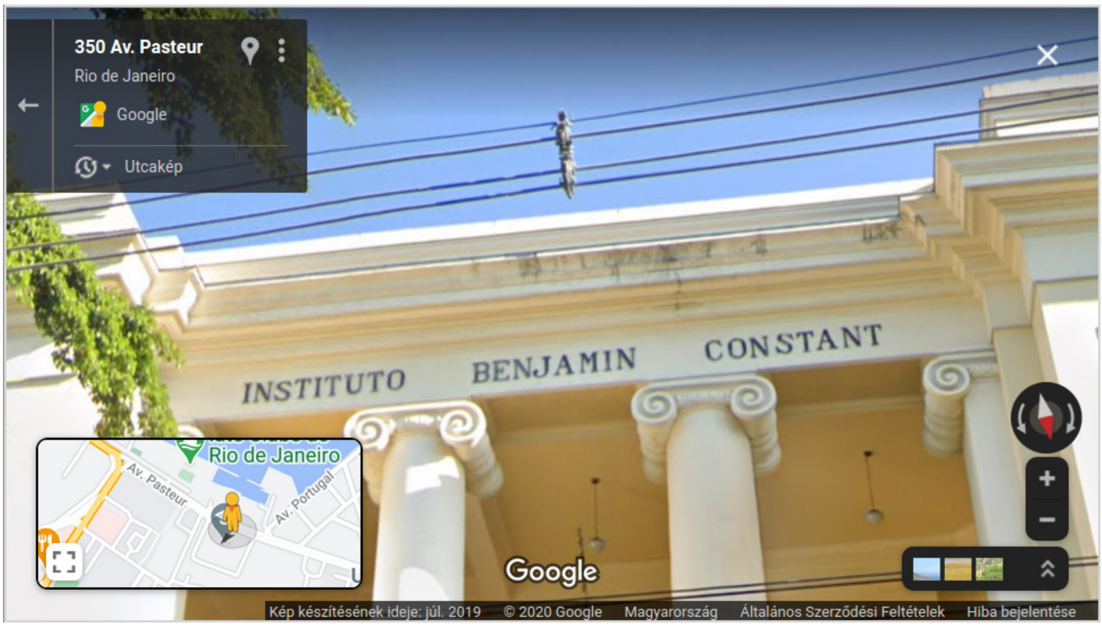
ezért f korlátos. A Liouville-tétel miatt f konstans, tehát p is konstans, kész.

Ugyanez a bizonyítás, Liouville-tétel helyett maximum-elvvel:

Ha $p(z)$ nem konstans, vagyis $n > 0$, akkor $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. A $|p(z)|$-nek van abszolút minimuma. Ez egyben lokális minimum is, vagyis ott a függvényérték 0.

Riói élmény: Konstans Benzsi Intézet

Konstansokról és nemkonstansokról nem csak tételek szólnak...



(Bentlakásos iskola látássérülteknek)