12. Laurent-sorok

Laurent-sorok konvergenciája. Kapcsolat a Fourier-sorokkal. Együtthatóformula. Egyértelműség. Laurent-sorba fejtés. Rac.tört függvények Laurent-sorba fejtése. A $\operatorname{ctg} z$ függvény 0 körüli Laurent-sorának első három tagja.

Definíció

Az $f(z)$-nek a c pontban *izolált szingularitása* van, ha f holomorf a c egy $\dot{B}(c,r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c-ben.

Az ilyen pontok körül is szeretnénk függvényt a vizsgálni, erre a hatványsor nem elég.

Példák

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \dots$$
$$\frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{24z} - \frac{z}{720} + - \dots$$

A példák alapján érdemes lehet a hatványsorokat negatív kitevőjű tagokkal kiegészíteni. Most az ilyenfajta sorokat vizsgáljuk meg közelebbről.

Definíció (Laurent-sor)

- **c körüli Laurent-polinom:**

$$\sum_{n=-M}^{N} a_n(z-c)^n = a_{-M}(z-c)^{-M} + a_{-M+1}(z-c)^{-M+1} + \dots + a_N(z-c)^N$$

- **c körüli Laurent-sor:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n =$$
$$= \dots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots =$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}}_{\text{szinguláris rész}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n}_{\text{holomorf rész}}$$

  - A Laurent-sor konvergens, ha a holomorf és a szinguláris rész is konvergens (hasonlóan az $\int_{-\infty}^{\infty}$ alakú improprius integrálokhoz).
  - Ha $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$, akkor a sort hatványsornak tekintjük; a c-beli érték az a_0.

Fourier-sor vs. Laurent-sor

A Fourier-sorok klasszikus alakja

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big);$$

az Euler-féle azonosságokkal átírhatjuk ebbe az alakba:

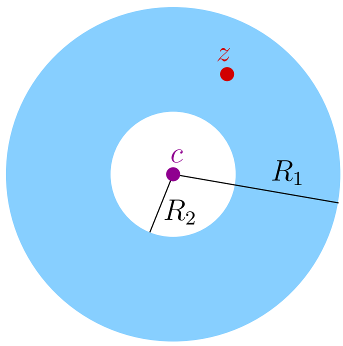
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n \cdot it},$$

ahol $a_0 = c_0$, és $n > 0$ esetén $a_n = c_n + c_{-n}$ és $b_n = (c_n - c_{-n})i$.
A $z = e^{it}$ helyettesítéssel

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

vagyis a Fourier-sor olyan Laurent-sor, amit nem a 0 középpont közelében, hanem az egységkörvonalon vizsgálunk.

A Laurent-sor konvergenciatartománya



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

- A sor holomorf része, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ egy hatványsor, ez valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_2 \leqslant \infty$ sugarú *kör belsejében* lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, a kör külsejében divergens. (A határral most sem foglalkozunk.)

- A sor szinguláris része, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ egy hatványsor, amelybe $\frac{1}{z-c}$-t helyettesítettünk; ez meg valamilyen, c középpontú, $0 \leqslant R_1 \leqslant \infty$ sugarú *kör külsejében* lokálisan egyenletesen abszolút konvergens, belül divergens.

- Lehetséges $R_1 > R_2$ is, de a számunkra érdekes eset, ha $R_1 < R_2$; ilyenkor a konvergenciahalmaz egy *körgyűrű*.

  - Ha a belső sugár 0, akkor csak a c pont hiányzik.
  - Ha a külső sugár ∞, akkor nincs is külső kör.

- Az egyenletes konvergencia miatt a sor mindkét fele egy-egy holomorf függvényhez konvergál, avagy, az első fele egy hatványsor, a másik fele pedig egy hatványsor és az $\frac{1}{z-c}$ függvény kompozíciója, tehát a második fele is holomorf. Tehát, a Laurent-sor összegfüggvénye holomorf.

Példák

Laurent-sor	R_1	R_2	konvergenciatartomány
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	0	∞	$0 < \lvert z\rvert < \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n}$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2} < \lvert z-1\rvert < 3$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$	2	1	$\varnothing$

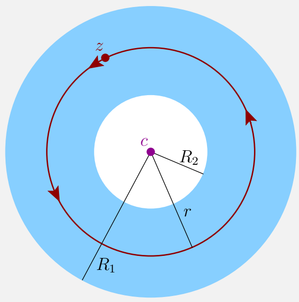
Tétel (együtthatóformula)

Tegyük fel, hogy az $R_1 < |z-c| < R_2$ körgyűrűn

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Ekkor bármely $R_1 < r < R_2$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} \mathrm{d}z.$$



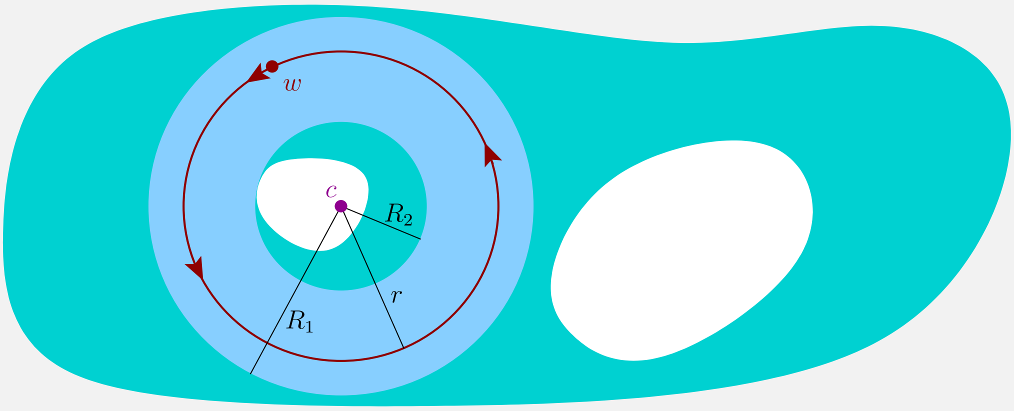
Következmény

A Laurent-sor egyértelmű.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{k+1}} \mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-c)^n}{(w-c)^{k+1}} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-c)^{n-k-1} \right) \mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} (w-c)^{n-k-1} \mathrm{d}w \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \text{ha } n-k-1 = -1 \\ 0 & \text{ha } n-k-1 \neq -1 \end{Bmatrix} = a_k.
\end{aligned}$$

Tétel (Laurent-sorba fejtés)



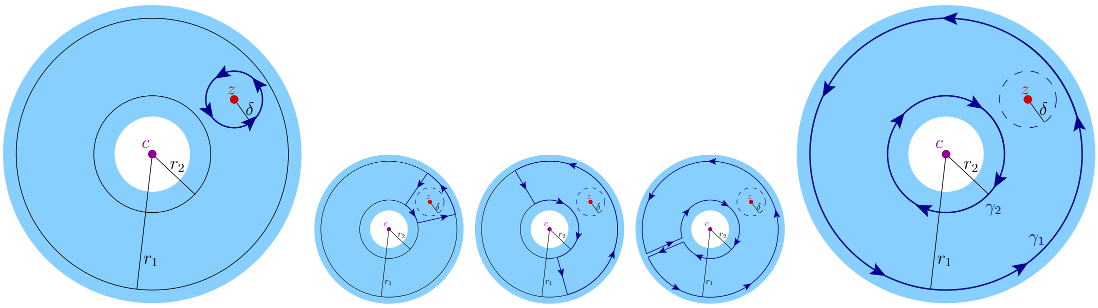
Ha f holomorf a $R_1 < |z-c| < R_2$ körgyűrűn, akkor a c körül a függvény Laurent-sorba fejthető ezen a halmazon:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n, \qquad \text{ha } R_1 < |z-c| < R_2,$$

és az együtthatók:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=r} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}} \mathrm{d}w \qquad \text{bármely } R_1 < r < R_2\text{-re.}$$

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges z pontot a gyűrűből. A z körül egy kicsi $\delta > 0$ sugarú körön írjuk fel a Cauchy-formulát. Legyen r_1 és r_2 két sugár, $R_1 < r_1 < |z-c| - \delta$ és $|z-c| + \delta < r_2 < R_2$. A kis kört átnyomorgatjuk az r_1 sugarú, negatív irányítású γ_1 kör és az r_2 sugarú, pozitív irányítású γ_2 kör uniójává.



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\delta} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w.$$

Másképpen: Felírjuk az általános Cauchy-formulát a két új körből álló rendszerre: Bármilyen, a körgyűrű külsejében felvő pontra, a két kör indexének összege 0, tehát

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \big(n(z,\gamma_1) + n(z,\gamma_2)\big) \cdot f(z) = 1 \cdot f(z).$$

A nagyobbik körön $\left|\frac{z-c}{w-c}\right| = \frac{|z-c|}{r_2} < 1$. A második vonalintegrál:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)-(z-c)}\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}}\mathrm{d}w =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{w-c}\right)^n\right)\mathrm{d}w =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_2}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(z-c)^n.$$

Ez lesz a Laurent-sor holomorf része.

A kisebbik körön $\left|\frac{w-c}{z-c}\right| = \frac{r_1}{|z-c|} < 1$. Az első vonalintegrál:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{z-w}\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)-(w-c)}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-c}{z-c}}\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(z-c)}\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{w-c}{z-c}\right)^k\right)\mathrm{d}w =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}f(w)(w-c)^k\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^{-k-1} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-c|=r_1}\frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\mathrm{d}w\right)\cdot(z-c)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\cdot(z-c)^n.$$

Ez pedig a Laurent-sor szinguláris része, kész.

Megjegyzés

Azonos középpontú, de különböző körgyűrűkön lehet különböző a Laurent-sor.

Ha $|z| < 1$, akkor
$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots;$$
Ha viszont $|z| > 1$, akkor
$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots.$$

Az $f(z) = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{2-z}$ függvény Laurent-sorai

$\lvert z\rvert < 1$	$1 < \lvert z\rvert < 2$	$2 < \lvert z\rvert$
$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1}{z^m}$	$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-1-2^{m-1}}{z^m}$

Program: Racionális tört függvények Laurent-sorba fejtése

Példa: Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{z^4+z+1}{z^3+z^2}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ gyűrűn.

1. Maradékosan osztunk, a maradékot parciális törtekre bontjuk:

$$f(z) = z - 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1}$$

2. A magasabb fokú törtek deriváltak:

$$... = z - 1 - \left(\frac{-1}{z}\right)' + \frac{1}{z+1}.$$

3. "Becsempésszük" a középpontot, vagyis átírjuk $(z-1)$-gyel:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{1+(z-1)}\right)' + \frac{1}{(z-1)+2}$$

4. Minden nevezőből kiemeljük a nagyobb tagot:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}\right)' + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

5. Átírjuk mértani sor összegévé:

$$... = (z-1) - \left(\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z-1}\right)^k\right)' + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^n$$

6. Rendezzük, csoportosítjuk:

$$... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{(z-1)^{k+2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n.$$

Példa

A 0 körül, a $0 < |z| < \pi$ körben, írjuk fel $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sorának első néhány tagját.
Ha $|z|$ kicsi, akkor

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} &= \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)}{z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)} \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(|z|^6)\right)^k \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120}\right) + \left(\frac{z^2}{6}\right)^2 + O(|z|^6)\right) \\
&= \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + O(|z|^6)\right) \cdot \left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + O(|z|^6)\right) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} + O(|z|^5).
\end{aligned}$$