13. Izolált szingularitások

Izolált szingularitások osztályozása. A megszüntethető szinularitások, pólusok és lényeges szingularitások jellemzése. Az $e^{1/z}$ viselkedése a 0 közelében. Casorati-Weierstrass tétel. Nagy Picard tétel (csak kimondani). Viselkedés a ∞-ben.

Definíció

Az $f(z)$-nek a c pontban "izolált szingularitása" van, ha f holomorf a c egy $\dot{B}(c, r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c-ben. Ezen belül:

- Az $f(z)$-nek a c pontban "megszüntethető szingularitása" van, ha van olyan, c-ben holomorf $g(z)$ függvény, amelyre (c kivételével) $f(z) = g(z)$.
  Ha $f(z)$-nek megszüntethető szingularitása van, akkor azt is szokás mondani, hogy $f(z)$ "holomorf" c-ben.
- Az $f(z)$-nek a c pontban "m-edrendű pólusa" van, ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$, ahol m pozitív egész, $g(z)$ holomorf c-ben és $g(c) \neq 0$.
- Az $f(z)$-nek a c pontban "lényeges szingularitása" van, ha c nem megszüntethető szingularitás, és nem is pólus.

Példa.

- *A* $\dfrac{\sin z}{z}$ *függvénynek megszüntethető szingularitása van a* 0*-ban.*
- *A* $\operatorname{ctg} z$ *függvénynek elsőrendű pólusa van a* π *többszöröseiben.*
- *Az* e^{1/z^4} *függvénynek lényeges szingularitása van a* 0*-ban.*

Megszüntethető szingularitások

Tétel (megszüntethető szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, és a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Ezek az állítások ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban megszüntethető szingularitása van.

(b) $a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$.

(c) $\lim_{z \to c} f(z)$ létezik és véges.

(d) A c egy pontozott környezetében $f(z)$ korlátos.

(e) $\lim\limits_{z \to c} \big((z-c) \cdot f(z)\big) = 0$.

Bizonyítás. (a)$\Leftrightarrow$(b), mert a hatványsor lesz a Laurent-sor és fordítva.

(a)⇒(c)⇒(d)⇒(e) triviális.

(e)⇒(b): Legyen k tetszőleges pozitív egész; megmutatjuk, hogy $a_{-k} = 0$.

Veszünk egy elég kicsi r sugarat, felírjuk az együtthatóformulát, majd triviális becslés:

$$|a_{-k}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z) \cdot (z-c)^{k-1} \mathrm{d}z \right| \leqslant \left(\tfrac{1}{2\pi} \max_{|z-c|=r} |f(z)| \cdot r^{k-1} \right) \cdot 2\pi r =$$

$$= \left(\max_{|z-c|=r} |(z-c) \cdot f(z)| \right) \cdot r^{k-1}.$$

Most $r \to 0$. A feltétel szerint $\lim_{r\to 0+} \max_{|z-c|=r} |(z-c) \cdot f(z)| = 0$. A második tényező, r^{k-1} konstans, ha $k = 1$, és 0-hoz tart, ha $k \geqslant 2$.

A határérték mindenképpen 0, tehát $a_{-k} = 0$.

Pólusok

Tétel (pólusok jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$, és m pozitív egész.

Ezek ekvivalensek:

(a) Az $f(z)$-nek a c pontban m-edrendű pólusa van.

(b) $a_{-m} \neq 0$, és $a_{-m-1} = a_{-m-2} = a_{-m-3} = \ldots = 0$.

(c) Az $1/f(z)$ függvénynek a c pontban m-szeres gyöke van.

(d) $\lim_{z\to c} \big((z-c)^m f(z)\big)$ létezik, véges és nem 0.

Következmény. *$f(z)$-nek akkor és csak akkor van pólusa c-ben, ha* $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$.

Bizonyítás. (a)⇒(b): Egy c-ben holomorf, nemnulla $g(z)$ függvénnyel $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$. Vegyük $g(z)$ hatványsorát c körül, és osszuk el $(z-c)^m$-mel, megkapjuk $f(z)$ Laurent-sorát. Trivi, hogy $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$ és $a_{-m} = g(c) \neq 0$.

(b)⇒(a): legyen $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-c)^n$, akkor $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) = a_{-m} \neq 0$.

(a)⇔(c): Ha $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{f(z)} = (z-c)^m \cdot \dfrac{1}{g(z)}$ és fordítva.

(a)⇒(d): $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^m}$ és $g(c) \neq 0$, tehát $\lim_{z\to c} \big((z-c)^m f(z)\big) = \lim_{z\to c} g(z) = g(c) \neq 0$.

(d)⇒(a): A $g(z) = (z-c)^m f(z)$ függvénynek véges, nemnulla határértéke van, tehát $g(z)$-nek megszüntethető szingularitása van c-ben, $g(c)$ értéke nem 0.

Lényeges szingularitások

Tétel (lényeges szingularitások jellemzése)

Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek izolált szingularitása van a c pontban, a c egy pontozott környezetében a Laurent-sorba fejtése $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$.

Ezek ekvivalensek:

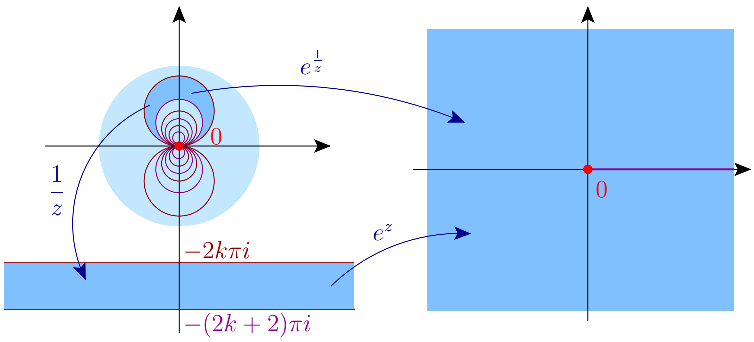
(a) Az $f(z)$-nek a c pontban lényeges szingularitása van.

(b) Az $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ együtthatók között végtelen sok nemnulla van.

(c) A $\lim_{z\to c} f(z)$ határérték nem létezik (véges és végtelen sem).

Példa. *az $e^{1/z}$ szingularitása a 0-ban*

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n}$$



Mindegyik holdacska képe a teljes komplex sík, kivéve a 0 pontot.

Példa (az $\exp(1/iz + \pi i/3)$ hatása a 0 közelében)

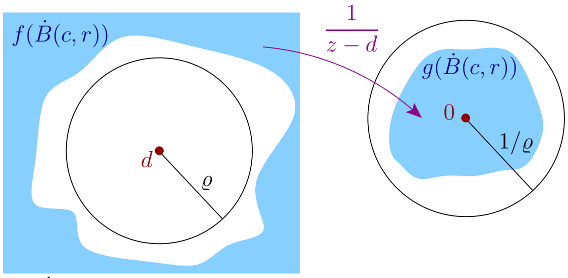
Tétel (Casorati–Weierstrass tétel)

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor

- bármely $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$-hez van olyan $(z_1, z_2, \dots)$ sorozat, amelyre $z_n \neq c$, $z_n \to c$ és $f(z_n) \to \alpha$.
- Bármely $r > 0$-ra, a $\dot{B}(c, r)$ pontozott környezet f szerinti képe, $f\big((\dot{B}(c, r)\big)$ sűrű $\mathbb{C}$-ben.

Bizonyítás. A két állítás ekvivalens; a másodikat bizonyítjuk.

↯ Tegyük fel, hogy $f\big((\dot{B}(c, r)\big)$ nem sűrű: valamilyen $B(d, \varrho)$ körben nincs pontja.



Legyen $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - d}$; ezzel $g\big((\dot{B}(c, r)\big) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{\varrho})$.

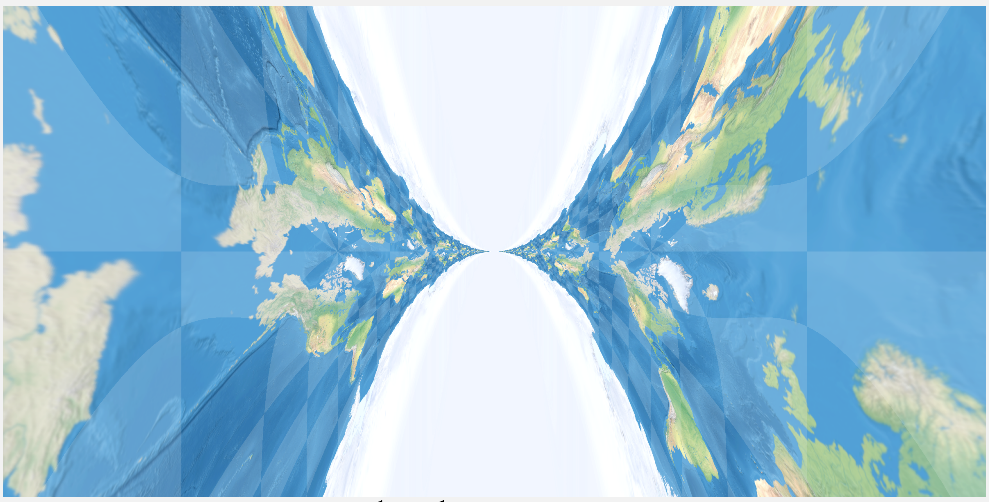
A $\dot{B}(c, r)$ pontozott környezetben $g(z)$ korlátos, tehát c-ben megszüntethető szingularitása van.

Ha $g(c) \neq 0$, akkor $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + d$ holomorf c-ben, de ez ellentmodás, mert feltettük, hogy lényeges szingularitása van.

Ha pedig $g(c) = 0$, akkor $\lim\limits_{z \to c} f(c) = \lim\limits_{z \to c} \left(\dfrac{1}{g(z)} + d \right) = \infty$, tehát f-nek pólusa van c-ben; ez is ellentmondás. ↯

Tétel (nagy Picard-tétel)

Ha $f(z)$-nek lényeges szingularitása van a c pontban, akkor a c bármely pontozott környezetében, legfeljebb 1 kivétellel, minden komplex értéket végtelen sokszor felvesz.



$\frac{1}{4} \sin \frac{1}{z}$ a 0 közelében

Nem bizonyítjuk. Vagy mégis?

Definíció (viselkedés ∞-ben)

Az $f(z)$ ∞-beli viselkedésén az $f(1/z)$ 0-beli viselkedését értjük:

- $f(z)$ a ∞-ben holomorf, ha $f(1/z)$ a 0-ban holomorf.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-szeres gyöke van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-szeres gyöke van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben m-edrendű pólusa van, ha $f(1/z)$-nek a 0-ban m-edrendű pólusa van.
- $f(z)$-nek a ∞-ben lényeges szingularitása van, ha $f(1/z)$-nek a 0 lényeges szingularitása.

Példa.

- *Az m-edfokú polinomoknak a ∞-ben m-edrendű pólusuk van.*
- *Az e^z függvénynek a ∞-ben lényeges szingularitása van.*