14. A reziduumtétel

Reziduum véges szingularitás körül. Reziduumtétel. Módszerek a reziduum kiszámítására. Reziduum ∞-ben.

Definíció (függvény reziduuma véges pontban)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

Az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli *reziduumának* nevezzük; jele

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) \quad \text{vagy} \quad \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Lemma (ekvivalens definíció)

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z-c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_o$ esetén

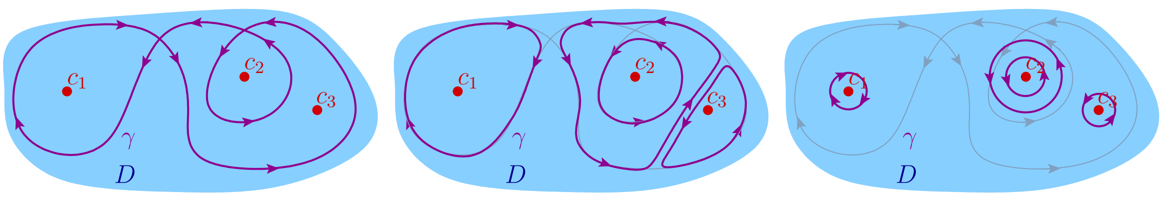
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z)\mathrm{d}z = \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Bizonyítás. Ez éppen az együttható-formula az a_{-1}-re.

Tétel (Rezidumtétel, nullhomotóp változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá γ egy D-ben nullhomotóp, rektifikálható, zárt görbe, amely nem megy át f szingularitásain. Ekkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$



Szemléletesen, a γ görbét részekre vagdoshatjuk úgy, hogy minden darabja egy szingularitást kerüljön meg egyszer, pozitív vagy negatív irányban, majd ezeket a darabokat egy-egy kis körre mozgatjuk, végül megszámoljuk a köröket a szingularitások körül.

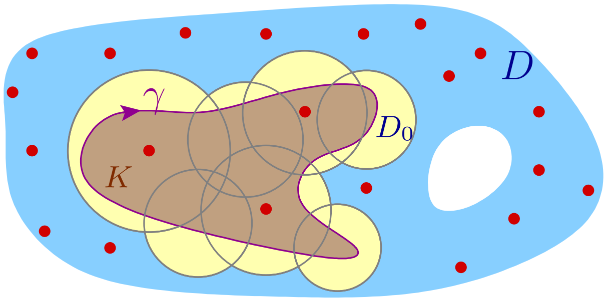
Persze a dolgok nem mindig olyan egyszerűek, ahogy elképzeljük...

Bárányhimlő. Szerencsére ezek csak megszüntethető szingularitások

A reziduumtétel bizonyítása. Az $f(z)$-nek végtelen sok szingularitása is lehet (a tartomány határán torlódhatnak); először ezzel kezdünk valamit.

A D-t egy szűkebb D_0 tartományra cseréljük, amelyben már csak véges sok szingularitás van.

A γ nullhomotóp, tehát van egy folytonos $\Gamma(t,u) : [0,1]^2 \to D$ leképezés úgy, hogy minden $u \in [0,1]$ paraméter értékre $t \mapsto \Gamma(t,u)$ egy zárt görbe, $\gamma(t) = \Gamma(t,0)$ és $t \to \Gamma(t,1)$ konstans. Legyen K a Γ képe, ami összefüggő és kompakt.



A K minden c pontja körül vegyünk egy $B(c,r_c)$ nyílt körlemezt úgy, hogy a $\dot{B}(c,r_c)$ pontozott környezeten az $f(z)$ holomorf legyen. Ezek a nyílt körök lefedik K-t, tehát közülük véges sok, $B_1, B_2, \dots, B_N$ is lefedi.

Legyen $D_0 = B_1 \cup \dots \cup B_N$; ez egy összefüggő, nyílt halmaz, amely tartalmazza K-t; tehát a γ görbe D_0-ben is nullhomotóp.

Mivel mindegyik B_j-ben legfeljebb egy szingularitása lehet $f(z)$-nek, a D_0 tartományban már csak véges sok szingularitás van.

Legyenek a D_0-beli szingularitások $c_1, \dots, c_m$.

Az $f(z)$-t bármelyik c_j szingularitásnak egy kis környezetében Laurent-sorba fejthetjük:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j,n}(z-c_j)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}.$$

A második sor a $\mathbb{C}\setminus\{c_j\}$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens, összege holomorf.

Az $a_{j,-1}$ együttható a c_j-beli reziduum: $a_{j,-1} = \operatorname*{Res}_{z=c_j} f(z)$.

Az $f(z)$ szingularitásait úgy szüntetjük meg, hogy $f(z)$-ből kivonjuk a Laurent-sorok szinguláris (negatív kitevős) részét: legyen

$$g(z) = f(z) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,-n}}{(z-c_1)^n}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2,-n}}{(z-c_2)^n}\right) - \dots - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,-n}}{(z-c_m)^n}\right).$$

A szingularitásokon kívül ez mind holomorf.

Bármely $1 \leqslant j \leqslant m$-re a c_j pontban az $f(z) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n}$ függvénynek megszüntethető szingularitása van, a többi kivont sor pedig holomorf c_j-ben. Tehát, $g(z)$-nek mindegyik c_j-ben megszüntethető szingularitása van; $g(z)$ az egész D_0 tartományon holomorf.

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z-c_j)^n};$$

a $D_0 \setminus \{c_1, \ldots, c_m\}$ tartományon lokálisan egyenletesen konvergens.

Most már végre integrálhatunk:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{j,-n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-c_j)^n} \right).$$

A $g(z)$ az egész D_0-on holomorf és γ nullhomotóp, ezért $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$.

$n \geqslant 2$ esetén az $\frac{1}{(z-c_j)^n}$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért ezeknek az integrálja is 0.

Tehát,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} \left(a_{j,-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-c_j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\operatorname*{Res}_{c_j} f \cdot n(\gamma, c_j) \right).$$

Ha $c \in D_0$ nem szingularitás, akkor ott f holomorf, így $\operatorname{Res} f = 0$.

Ha $c \notin D_0$, akkor $\frac{1}{z-c}$ holomorf D_0-on és γ nullhomotóp, ezért $n(\gamma, c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c} = 0$.

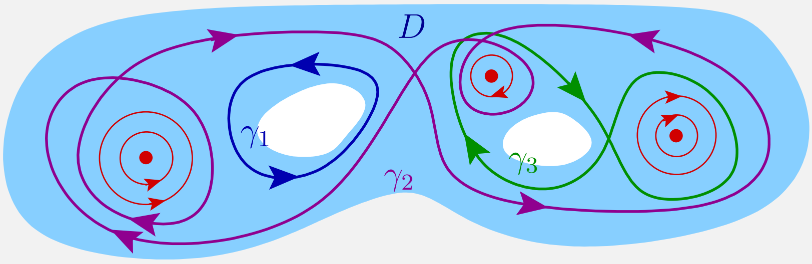
Ezek után

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, c_j) \cdot \operatorname*{Res}_{c_j} f = \sum_{c \in D} n(\gamma, c) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$$

Tétel (rezidumtétel, nullhomológ változat)

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f(z)$ holomorf D-n, izolált szingularitások kivételével, továbbá $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ rektifikálható, zárt görbék D-ben, amelyek nem mennek át $f(z)$ szingularitásain, és bármely $c \notin D$ pontra $\sum\limits_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) = 0$.

Ekkor $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{c \in D} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f.$



Bizonyítás (vázlat). Legyen $D_1 \subset D$ az a tartomány, ahol f holomorf. Az eddigi görbékhez továbbiakat veszünk hozzá: mindegyik c szingularitás körül rajzolunk $-\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c)$ darab kis kört. Az így kapott görbe lánc indexe minden D_1-en kívüli pontra nézve 0, tehát az általános Cauchy-tétel szerint ezeken a görbéken a vonalintegrálok összege 0. Ezért,

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{c \in D} \left(\sum_{j=1}^{k} n(\gamma_j, c) \right) \cdot \operatorname*{Res}_{c} f = 0.$$

A reziduum kiszámítása speciális esetekben

- Ha fel tudjuk írni a Laurent-sort, leolvashatjuk...
- Cauchy-formulákkal: Ha $f(z)$ holomorf a c pontban, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{z-c} = f(c); \qquad \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(c)}{k!};$$

Példák.

- $z^2 \cdot e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} z^{-1} + \frac{1}{24} z^{-2} + \ldots$, *tehát* $\operatorname*{Res}_{z=0} \left(z^2 \cdot e^{1/z} \right) = \frac{1}{6}$.
- $\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^3 (1 - \frac{z^2}{6} + \ldots)} = \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \ldots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1/6}{z} + \ldots$, *tehát* $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6}$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \cos 0$.
- $\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!} = -\frac{1}{2}$.

A reziduum kiszámítása elsőrendű pólusoknál

- Ha $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-c)^n$, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} f(z) = a_{-1} = \lim_{z \to c} f(z) \cdot (z-c).$$

- Ha a c pontban $f(z)$ holomorf és $g(z)$-nek elsőrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \big(f(z) \cdot g(z) \big) = \lim_{z \to c} f(z) \cdot g(z) \cdot (z-c) = f(c) \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} g(z).$$

- Ha a c pontban $f(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \to c} \frac{z-c}{f(z)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

- Ha a c pontban $f(z)$ és $g(z)$ holomorf, $g(c) \neq 0$, és $h(z)$-nek egyszeres gyöke van, akkor

$$\operatorname*{Res}_{z=c} \frac{f(z)}{g(z) \cdot h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{1}{h(z)} = \frac{f(c)}{g(c)} \cdot \frac{1}{h'(c)} = \frac{f(c)}{g(c) \cdot h'(c)}.$$

Példák.

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi}\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{(\sin z)'\big|_{z=\pi}}=\frac{1}{-1}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z^2+1)'\Big|_{z=i}}=\frac{1}{2i}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^4-1}=\frac{1}{(z^4-1)'\Big|_{z=i}}=\frac{1}{-4i}.$$

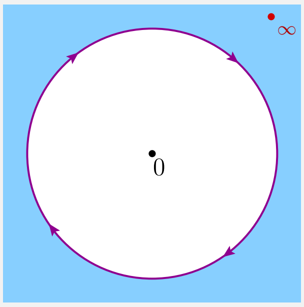
$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)\cdot\cos z}=\frac{e^{2z}}{(z^3+2\sin z)'\cdot\cos z}\Bigg|_{z=0}=\frac{1}{2}.$$

Definíció (Definíció (reziduum a végtelenben)

Ha $f(z)$-nek izolált szingularitása van a ∞-ben, vagyis egy nagy körön kívül holomorf, és itt a Laurent-sorba fejtése $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$, akkor $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-a_{-1}$.

Lemma (ekvivalens definíciók)

- Ha $f(z)$ holomorf az R sugarú körön és azon kívül, akkor $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z$.
- $\operatorname*{Res}\limits_{z=\infty}f(z)=\operatorname*{Res}\limits_{w=0}\left(-\dfrac{1}{w^2}\cdot f\left(\dfrac{1}{w}\right)\right)$.



Bizonyítás. (a) Együttható-formula a_{-1}-re.

(b) Helyettesítéses integrálás: $z=\frac{1}{w}$ (Megfordítja a kör irányítását!), $\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$,

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{R}}f\left(\frac{1}{w}\right)\frac{-\mathrm{d}w}{w^2}=\operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{w^2}\cdot f\left(\frac{1}{w}\right)\right).$$

Tétel (A reziduumok összege)

Ha $f(z)$ véges sok izolált szingularitás kivételével az egész síkon holomorf, akkor a reziduumainak összege, beleértve a ∞-beli reziduumot is, nulla:

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}}\operatorname*{Res}_{c}f=0.$$

Bizonyítás. Ha a véges szingularitások a $|z| = R$ kör belsejében vannak, akkor

$$\sum_{c\in\overline{\mathbb{C}}} \operatorname*{Res}_{c} f = \left(\sum_{|c|<R} \operatorname*{Res}_{c} f \right) + \operatorname*{Res}_{\infty} f$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \mathrm{d}z = 0.$$