15. A reziduumtétel alkalmazásai

$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}$ és $\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}$ kiszámítása a reziduumtétel segítségével.

A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény alapvető tulajdonságai. Végtelen sorok összegzése a $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$, a $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ és a $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ függvények reziduumaival. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ és $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+-\dots$ kiszámítása.

Improprius integrálok kiszámítása

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=? \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=? \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}+1}\mathrm{d}x=? \qquad \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=?$$

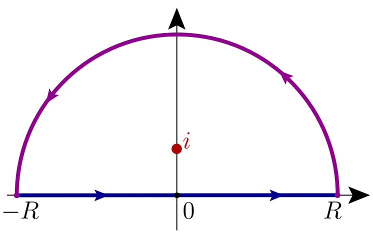
Példa (félkörön integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=?$$

Megoldás:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z-\int \frac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z\\ &=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{iz}}{z^2+1}+O\left(\frac{1}{R^2}\cdot R\right)\\ &=2\pi i\cdot\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}+O\left(\frac{1}{R}\right)\\ &=2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i}+O\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{\pi}{e}+O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$



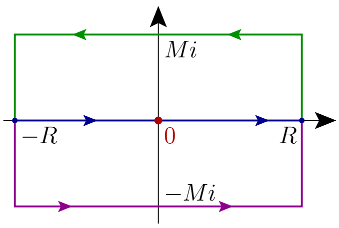
A $R\to\infty$ határátmenetből: $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{e}=\frac{\pi}{2e}$.

Példa (félkörön vagy téglalap határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=?$$

Megoldás:

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$$



$$= \frac{1}{2}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z.$$

A felső félsíkban e^{iz}, az alsó félsíkban e^{-iz} korlátos.

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{4i}\int_{\square} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\leftarrow\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{e^{iz}}{z} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\leftarrow\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4i}\int_{\ulcorner\leftarrow\urcorner} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \frac{1}{4i}\int_{\llcorner\to\lrcorner} \frac{e^{-iz}}{z}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

A négy függőleges szakaszon $|e^{\pm iz}| \leqslant 1$ és $|z| \geqslant R$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{R}\cdot M$.

A két vízszintes szakaszon $|e^{\pm iz}| \leqslant e^{-M}$ és $|z| \geqslant M$, tehát $\left|\int \frac{e^{\pm iz}}{z}\mathrm{d}z\right| < \frac{e^{-M}}{M}\cdot 4R$.

Például az $M = \sqrt{R}$ választással

$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) + O\left(e^{-\sqrt{R}}\sqrt{R}\right).$$

Mindkét hibatag 0-hoz tart, tehát

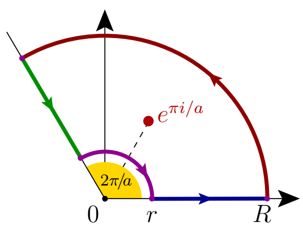
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Példa (egy szögtartomány határán integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = ? \qquad (a > 1)$$

Megoldás:

$$2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \int_{\circlearrowleft} \frac{\mathrm{d}z}{z^a+1} = \int_{\text{kék}} + \int_{\text{bordó}} + \int_{\text{zöld}} + \int_{\text{lila}}$$



$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/a}} \frac{1}{z^a+1} = \left.\frac{1}{(z^a+1)'}\right|_{z=e^{\pi i/a}} = \frac{1}{a\cdot(e^{\pi i/a})^{a-1}} = \frac{-e^{\pi i/a}}{a}$$

$$\int_{\text{kék}} = \int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1}, \quad \int_{\text{zöld}} = \int_r^R \frac{-e^{2\pi i/a}\mathrm{d}x}{x^a+1} \quad \int_{\text{bordó}} = O(\frac{1}{R^a}\cdot R) = O(\frac{1}{R^{a-1}}), \quad \int_{\text{lila}} = O(r)$$

$$2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a} = (1-e^{2\pi i/a})\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} + O(\frac{1}{R^{a-1}}) + O(r)$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = \lim_{r\to 0, R\to\infty}\int_r^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a+1} = 2\pi i\cdot\frac{-e^{\pi i/a}}{a\cdot(1-e^{2\pi i/a})} = \frac{\pi}{a}\cdot\frac{2i}{e^{\pi i/a}-e^{-\pi i/a}} = \frac{\pi/a}{\sin(\pi/a)}.$$

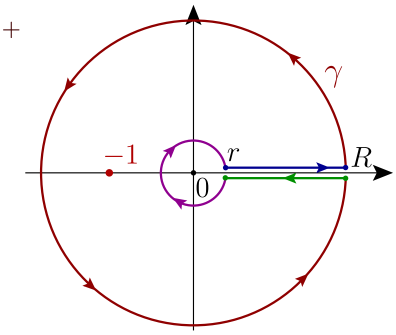
$a\to 1$-re, $a = 2$-re és $a\to\infty$-re könnyen ellenőrizhetjük.

Példa ("kulcslyukgörbén" integrálunk)

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:

Legyen $f(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nincs pólusa a nemnegatív valós számokon, $d = \deg f \leqslant -2$, és $p(x)$ n-edfokú polinom. Integráljuk az $f(z)\cdot p(\log z)$ függvényt ezen a kulcslyuk görbén. (r pici, R nagy, és $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$.)



$\int_{\text{kék}} = \int_r^R f(x)p(\log x)\ dx,\qquad \int_{\text{zöld}} = -\int_r^R f(x)p(\log x + 2\pi i)\ dx,$

$\int_{\text{bordó}} = O\Big(R^d(\log R)^n\cdot R\Big),\qquad \int_{\text{lila}} = O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$

Reziduumtétel:

$$\sum_{r<|c|<R}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\cdot p(\log z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_r^R f(x)\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}\mathrm{d}x + O\Big(R^{d+1}(\log R)^n\Big) + O\Big((\log\frac{1}{r})^n\cdot r\Big).$$

$r\to 0$, $R\to\infty$ határátmenet: $\displaystyle\int_0^\infty f(z)\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}\mathrm{d}x = \sum_{c\in\mathbb{C}}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot p(\log x)\Big).$

Egy kis számolással, a

$$p(X) = -\frac{1}{3}(X-\pi i)^3 - \frac{\pi^2}{3}(X-\pi i)$$

polinomra

$$\frac{p(X)-p(X+2\pi i)}{2\pi i} = X^2.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\frac{p(\log x)-p(\log x+2\pi i)}{2\pi i}}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{p(\log z)}{(z+1)^2}$$
$$= \operatorname*{Res}_{z=-1}\Big(p(\log z)\Big)'\Big|_{z=-1} = p'(\log(-1))\cdot\frac{1}{-1} = -p'(\pi i) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Végtelen sorok összegének kiszámítása

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = ?$$

$$\frac{1}{1^4+1}+\frac{1}{2^4+1}+\frac{1}{3^4+1}+\frac{1}{4^4+1}+\ldots = ?$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-+\ldots = ?$$

Lemma

(a) A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény izolált szingularitásai az egész számok.

(b) A $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvénynek az egész helyeken elsőrendű pólusa van, és a reziduuma 1.

(c) Ha $f(z)$ holomorf a $z = k$ pontban, akkor $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

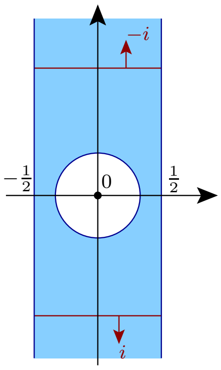
(d) Ha a síkból elhagyjuk az egész számok $1/4$ sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon a $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény korlátos.

Bizonyítás. (a) $\pi\operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ pólusai ott vannak, ahol $\sin(\pi z) = 0$, vagyis az egész helyeken.

(b) $\operatorname*{Res}_{z=k}\dfrac{\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \dfrac{\pi\cos(\pi z)}{(\sin(\pi z))'}\bigg|_{z=k} = 1$.

(c) Az $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$-nek a k helyen elsőrendű pólusa van, tehát $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)\cdot\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(d) $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ esetén $\pi\operatorname{ctg}(\pi z) \to \mp i$, ezért pl. a $|\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2}$, $|z| > 1/4$ perióduson a függvény korlátos.



Lemma

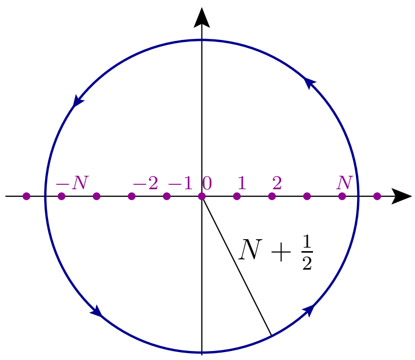
(a) Ha $f(z)$ racionális törtfüggvény, $\deg f \leqslant -2$, akkor $\displaystyle\sum_{c\in\mathbb{C}}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

(b) Az összeg véges sok kivétellel megegyezik a $\displaystyle\sum_{k=\infty}^{\infty} f(k)$ összeggel; a kivételek az $f(z)$ pólusai.

Bizonyítás.

(b) A szingularitások a $\operatorname{ctg}(\pi)$ szingularitásai (tehát az egészek), továbbá $f(z)$ pólusai. Ha egy k egész helyen f holomorf, akkor ott $\operatorname*{Res}_{z=k}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = f(k)$.

(a) Legyen N pozitív egész, és integráljunk a $|z| = N+\frac{1}{2}$ körön. Az N legyen olyan nagy, hogy $f(z)$ minden pólusa a $N/2$ sugarú körön belül legyen.



A körvonalon $|f(z)| = O(N^{\deg f}) \leqslant O(N^{-2})$, $\pi\operatorname{ctg}(\pi z)$ korlátos, így

$$\sum_{|c|\leqslant N}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=N+\frac{1}{2}} f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\mathrm{d}z = O\left(\frac{1}{N^2}\cdot N\right) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Az $N\to\infty$ határátmenetből $\displaystyle\sum_{c\in\mathbb{C}}\operatorname*{Res}_{z=c}\Big(f(z)\cdot\pi\operatorname{ctg}(\pi z)\Big) = 0$.

Példa

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = ?$$

Megoldás. Pólusok az egész helyeken vannak, ezért $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 0.$

Ha $k \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}_{z=k} \left(\frac{1}{z^2} \cdot \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \right) = \frac{1}{k^2}.$

A $\operatorname{ctg} z$ Laurent-sora a 0 közelében $\operatorname{ctg} z = z^{-1} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \ldots$

Átírva πz-vel: $\frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = z^{-3} - \frac{\pi^2}{3} z^{-1} - \frac{\pi^4}{45} z - \ldots,$ tehát $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = -\frac{\pi^2}{3}.$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Milyen függvényeket lehetne még használni $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ helyett?

- $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ A szingularitások az egész számok. Ha a síkból elhagyjuk az egész számok 1/4 sugarú környezeteit, a megmaradt halmazon ez a függvény is korlátos.
  $\operatorname{Res}_{z=k} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = (-1)^k$; váltakozó előjelű sorok összegét kaphatjuk meg.
- $\frac{\pi}{\cos(\pi z)}$ ugyanaz, csak $\frac{1}{2}$-del elcsúsztatva. $\operatorname{Res}_{z=k+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{\cos(\pi z)} = (-1)^{k+1}.$

Példa

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = ?$$

Megoldás:

$$\sum \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = 0; \quad \text{a szingularitások: } \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ és a } 0.$$

$$\operatorname{Res}_{k+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z^3} \cdot \frac{\pi}{\cos(\pi z)} \right) = \frac{1}{(k+\frac{1}{2})^3} \cdot (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 8}{(2k+1)^3}.$$

A 0 közelében $\cos(\pi z) = 1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + O(|z|^4)$, tehát

$$\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1-\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi}{z^3}\cdot\left(1+\frac{\pi^2}{2}z^2+O\big(|z|^4\big)\right) = \pi z^{-3}+\frac{\pi^3}{2}z^{-1}+O\big(|z|\big)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2}.$$

$$0 = \sum \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3}\cdot\frac{\pi}{\cos(\pi z)}\right) = \frac{\pi^3}{2} - 8\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}, \qquad \text{tehát:} \quad \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$