16. Az argumentumelv

Meromorf függvények. Logaritmikus derivált. Argumentumelv rektifikálható görbékkel határolt tartományra. Az argumentumelv kiterjesztései

Definíció (meromorf függvény)

Az $f(z)$ függvény *meromorf* a D tartományon, ha izolált szingularitások kivételével holomorf, és mindegyik szingularitás pólus.

Ebben a részben meromorf függvények gyökeit és pólusait fogjuk számolni mindenféle görbék belsejében.

A fő eszközünk a gyökök számolásához:

Definíció (logaritmikus derivált)

Legyen $f(z)$ meromorf egy D tartományon. Az $f(z)$ *logaritmikus deriváltja* az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ függvény.

A logaritmikus derivált ott értelmes (és persze holomorf), ahol az $f(z)$ holomorf és nem nulla.

A lokálisan létező $\log f(z)$ függvénnyel $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \big(\log f(z)\big)'$; innen jön a név.

Az $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ helyett szokás így is írni: $\dfrac{f'}{f}(z)$, kihangsúlyozva, hogy a logaritmikus derivált egy operátor.

Lemma (A logaritmikus derivált tulajdonságai)

(a) $\dfrac{(f\cdot g)'}{f\cdot g} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g}$;

(b) $\dfrac{(f/g)'}{f/g} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$.

Bizonyítás. (a)

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g},$$

vagy, némi odafigyeléssel, lokálisan

$$\frac{(fg)'}{fg} = (\log fg)' = (\log f + \log g + C)' = (\log f)' + (\log g)' = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}.$$

(b)

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{(f'g - fg')/g^2}{f/g} = \frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g},$$

vagy:

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = (\log f/g)' = (\log f - \log g + C)' = (\log f)' - (\log g)' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Tétel (A logaritmikus derivált reziduumai)

Tegyük fel, hogy $f(z)$ meromorf a c pont egy környezetében.

(a) Ha f holomorf c-ben és $f(c) \neq 0$, akkor $\dfrac{f'}{f}$ holomorf c-ben, így $\operatorname*{Res}_{c} \dfrac{f'}{f} = 0$.

(b) Ha f-nek m-szeres gyöke van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname*{Res}_{c} \dfrac{f'}{f} = m$.

(c) Ha f-nek m-edrendű pólusa van c-ben, akkor $\dfrac{f'}{f}$-nek c-ben elsőrendű pólusa van, és $\operatorname*{Res}_{c} \dfrac{f'}{f} = -m$.

Bizonyítás. (b) $f(z) = h(z) \cdot (z-c)^m$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) + \frac{\big((z-c)^m\big)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) + \frac{m}{z-c};$$

$$\operatorname*{Res}_{c} \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_{c} \frac{h'}{h}(z) + \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 + m.$$

(c) $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-c)^m}$, a $h(z)$ függvény holomorf c-ben, és $h(c) \neq 0$.

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{h'}{h}(z) - \frac{\big((z-c)^m\big)'}{(z-c)^m} = \frac{h'}{h}(z) - \frac{m}{z-c};$$

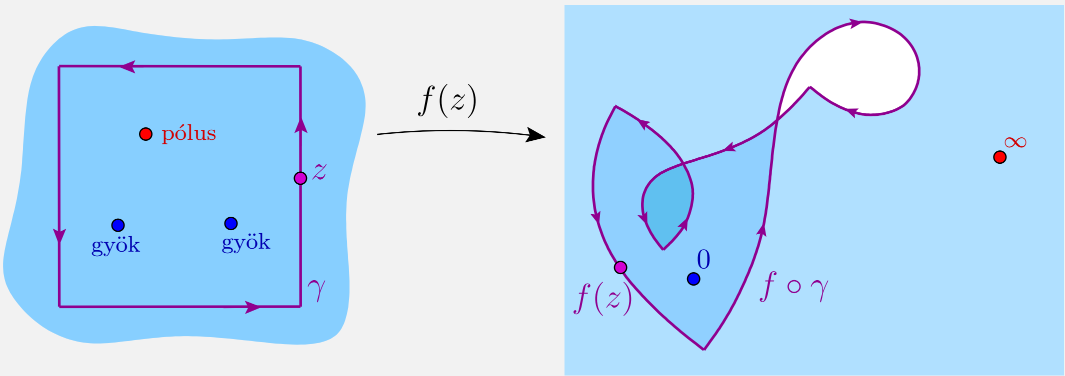
$$\operatorname*{Res}_{c} \frac{f'}{f}(z) = \operatorname*{Res}_{c} \frac{h'}{h}(z) - \operatorname*{Res}_{z=c} \frac{m}{z-c} = 0 - m.$$

Tétel ((Cauchy-féle) argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.
Jelöljük Z-vel és P-vel $f(z)$ gyökeinek és pólusainak számát γ belsejében multiplicitással, vagyis minden gyököt és pólust annyiszor számolunk, ahányszoros gyök, illetve ahányadrendű pólus. Ekkor

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z = n(f\circ\gamma, 0)$$

avagy: *A gyökök száma mínusz a pólusok száma a γ belsejében éppen annyi, mint ahányszor z-vel a görbe mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke körbefordul.*



Bizonyítás. (a) Az $\frac{f'}{f}(z)$ logaritmikus derivált reziduuma az m-szeres gyököknél m, az m-edrendű pólusoknál $-m$, a többi pontban 0. A gyökök száma, Z a pozitív reziduumok összege, a pólusok száma, P pedig a negatív reziduumok összege (-1)-szer.

$$Z - P = \sum_{\gamma \text{ belsejében}} \operatorname{Res}\frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z.$$

(b) A $w = f(z)$ helyettesítéssel integrálva $\mathrm{d}w = f'(z)\mathrm{d}z$ és

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{w\in(f\circ\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w} = n(f\circ\gamma, 0).$$

Definíció

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$. Azt mondjuk, hogy az a pontban a b érték multiplicitása m, ha

- $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ és $f^{(m)}(a) \neq 0$, vagyis
- az $f(z) - b$ függvénynek az a szám m-szeres gyöke.

Tétel

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és a komplex szám. Legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ pólusain, és a γ pontjaiban $f \neq a$.
Jelöljük Z_a-val és P-vel, hogy $f(z)$ hányszor veszi fel az a értéket, illetve $f(z)$ pólusainak számát γ belsejében multiplicitással. Ekkor

$$Z_a - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\mathrm{d}z = n(f\circ\gamma, a)$$

avagy: *a függvény éppen annyiszor veszi fel az a értéket, mínusz a pólusok száma, mint ahányszor z-vel γ mentén körbesétálva, $f(z)$ értéke megkerüli az a-t.*

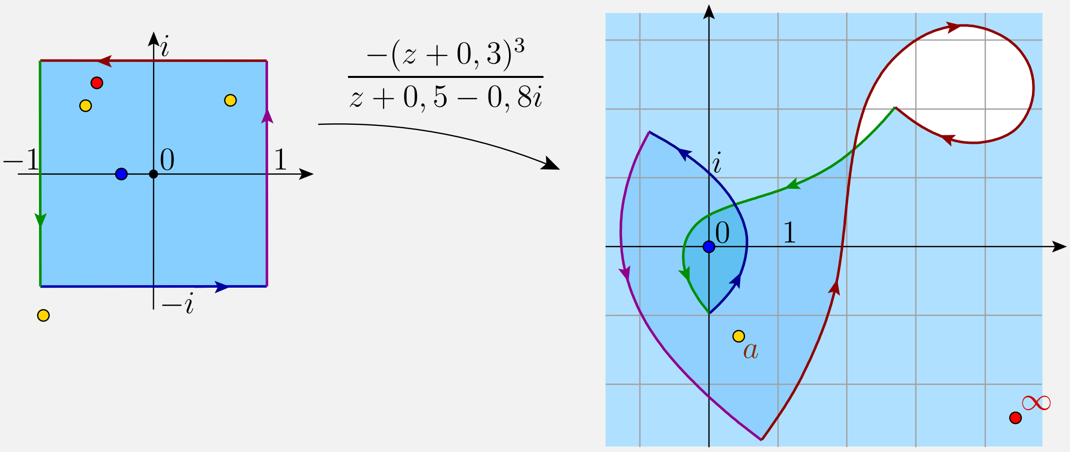
Bizonyítás. Argumentumelv a $g(z) = f(z) - a$ függvényre, majd $w = f(z)$ helyettesítés:

$$Z_a(f) - P(f) = Z(g) - P(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{z\in\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{w\in(f\circ\gamma)}\frac{\mathrm{d}w}{w-a} = n(f\circ\gamma, a).$$

Példa

A γ görbe a $\pm 1 \pm i$ csúcsú négyzet határa és $f(z) = \dfrac{-(z+0,3)^3}{z+0,5-0,8i}$.



A függvénynek háromszoros gyöke van a $(-0,3)$-ben, és elsőrendű pólusa a $(-0,5+0,8i)$-ben, tehát $Z - P = 3 - 1 = 2$. Az $f\circ\gamma$ görbe kétszer kerüli meg a 0-t.

A baloldalon a három sárga pont egyszeres képe az a pont, de csak kettő esik a γ belsejébe. Tehát $Z_a - P = 2 - 1 = 1$; az $f\circ\gamma$ görbe egyszer kerüli meg az a pontot.

Tétel (általános argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf, $g(z)$ holomorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át $f(z)$ gyökein és pólusain.
Bármely c pontra legyen $m(c)$ a c multiplicitása, ha c gyöke f-nek; legyen $-m(c)$ a c rendje, ha c pólusa f-nek; egyébként legyen $m(c) = 0$. Ekkor

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z.$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{f'}{f}$-nek csak elsőrendű pólusai vannak,

$$\operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = g(c) \cdot \operatorname*{Res}_c \frac{f'}{f} = g(c) \cdot m(c);$$

$$\sum_{c \text{ belső pont}} m(c) \cdot g(c) = \sum_{c \text{ belső pont}} \operatorname*{Res}_c \left(g \cdot \frac{f'}{f} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'}{f}(z) \mathrm{d}z.$$

Példák

- $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z$ az f gyökeinek száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \cdot \frac{f'}{f}(z)\mathrm{d}z$ az f gyökeinek összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\mathrm{d}z$ az $f(z) = a$ egyenlet megoldásainak száma (mínusz a pólusok száma) a görbe belsejében, multiplicitással.
- $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - a}\mathrm{d}z$ az $f(z) = a$ egyenlet megoldásainak összege (mínusz a pólusok összege) a görbe belsejében, multiplicitással.

  Ha $f(z)$ holomorf, és valahonnan tudjuk, hogy pontosan egy, egyszeres megoldás van, akkor ez az integrál megadja magát a megoldást.