17. A Rouché-tétel és alkalmazásai

Rouché-tétel. Az algebra alaptételének bizonyítása a Rouché-tételből. Lokális értékeloszlás. A nyílt leképezés tétele. Lokális inverz létezésének feltétele. Az inverzfüggvény folytonossága és differenciálhatósága.

Tegyük fel, szeretnénk bebizonyítani az algebra alaptételét az argumentum-elvből.

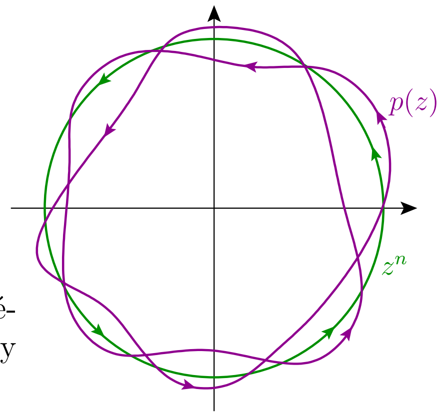
Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Ha $|z|$ nagy, akkor

$$p(z) = z^n + \text{"zaj"};$$

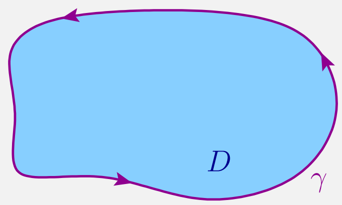
a "zaj" sokkal kisebb, mint a főtag, z^n.

Egy nagy körön a z^n n-szer fordul körbe. Szemléletesen, egy kis zaj ezt nem tudja elrontani... Vagy mégis?



Tétel (Rouché [Eugène Rouché, francia, 1832–1910])

Legyen $f(z)$, $g(z)$ és $h(z) = f(z) + g(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, rektifikálható egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D-ben fekszik úgy, hogy γ nem megy át f és g pólusain. Jelölje $Z_{\ldots}$ és $P_{\ldots}$ a megfelelő függvény gyökeinek, és pólusainak számát γ belsejében.



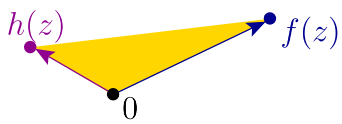
(1a) Ha a γ pontjaiban $|f| > |g|$, akkor $Z_{f+g} - P_{f+g} = Z_f - P_f$.

(1b) Ha a γ pontjaiban $|f| > |f - h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

(2a) Ha a γ pontjaiban sem f, sem h nem nulla, és f/h nem lehet negatív valós sem, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

(2b) Ha a γ pontjaiban $|f - h| < |f| + |h|$, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Bizonyítás.
(1a) és (1b) ugyanaz.
(2a) és (2b) is azt fejezi ki, hogy az $f(z)$ és $h(z)$ pontokat összekötő zárt szakasz nem tartalmazza a 0-t.



$(2b) \Rightarrow (1b)$ triviális, mert ha $|f - h| < |f|$, akkor $|f - h| < |f| + |h|$.

Elég (2a)-t igazolni.

(2a) Állítás: ha a γ pontjaiban $f \neq 0$, $h \neq 0$, és f/h nem lehet negatív valós, akkor $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Legyen D_1 az a halmaz, ahol sem f, sem h nem nulla, és f/h nem negatív valós. Ahol $f = 0$ vagy $h = 0$ vagy $f/h \in (-\infty, 0)$ az egy relatív zárt halmaz, tehát D_1 nyílt; az egyik komponensében fekszik γ.

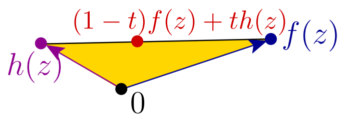
A D_1 halmazban $\dfrac{(h/f)'}{h/f}$-nek van primitív függvénye D_1-en: a $\log \dfrac{h}{f}$ főértéke. Ezért

$$(Z_h - P_h) - (Z_f - P_f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(h/f)'}{h/f} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\log \frac{h}{f}\right)' = 0.$$

Tehát, $Z_h - P_h = Z_f - P_f$.

Alternatív bizonyítás: $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén legyen $\varphi(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\big((1-t)f + th\big)'}{(1-t)f + th}$. Ez minden $0 \leqslant t \leqslant 1$ esetén értelmes, mert γ pontjaiban $(1-t)f + th \neq 0$.



A $\varphi(t) = Z_{(1-t)f+th} - P_{(1-t)f+th}$ érték mindig egész szám; másrészt $\varphi(t)$, mint paraméteres integrál, folytonos. Tehát $\varphi(t)$ konstans, és $Z_f - P_f = \varphi(0) = \varphi(1) = Z_h - P_h$.

Egy újabb bizonyítás az algebra alaptételére

Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Legyen
$$R > 1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|,$$
és írjuk fel a Rouché-tételt a $p(z)$ és az z^n függvényekre a $|z| \leqslant R$ körben.

A körvonalon

$$\big|p(z) - z^n\big| = \big|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0\big| \leqslant$$

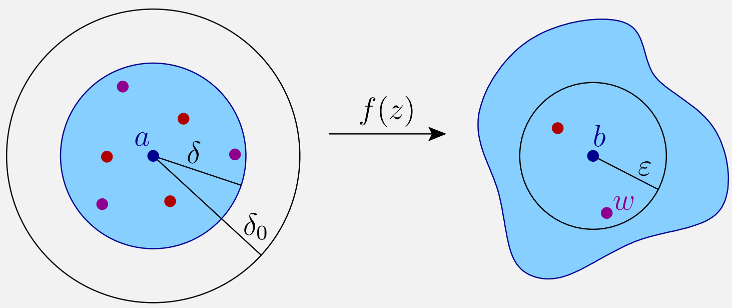
$$\leqslant |a_{n-1}|R^{n-1} + \ldots + |a_1|R + |a_0| \leqslant \big(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|\big)R^{n-1} < R^n = |z^n|,$$

így a Rouché-tétel szerint a kör belsejében (multiplicitással számolva), a $p(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a z^n függvénynek, vagyis n darab.

Tétel (lokális értékeloszlás)

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és $f(a) = b$ k-szoros értéke (azaz $f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$). Ekkor $\exists\delta_0 > 0$ $\forall 0 < \delta \leqslant \delta_0$ $\exists\varepsilon > 0$, hogy

- Az $f(z) = b$ egyenletnek egyetlen megoldása az $B(a,\delta)$ halmazban a $z = a$ (és ez k-szoros érték), és
- Bármely $w \in \dot{B}(b,\varepsilon)$ számra az $f(z) = w$ egyenletnek pontosan k különböző megoldása van a $B(a,\delta)$ halmazban, és ezek mind egyszeres értékek.



Bizonyítás. Elég azt az esetet igazolni, ha $a = b = 0$.

Válasszuk δ_0-t olyan kicsinek, hogy a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $f \neq 0$ és $f' \neq 0$; ezt biztosan megtehetjük az unicitástétel miatt. Ezzel biztosítjuk, hogy $f(z) = 0$ egyetlen megoldása a $z = 0$, és minden más érték egyszeres.

Ha kaptunk az ellenségünktől egy neki tetsző $0 < \delta \leqslant \delta_0$ sugarat, akkor a mi lépésünk:

$$\varepsilon = \min_{|z|=\delta} \bigl|f(z)\bigr|.$$

($\varepsilon > 0$, mert a körvonalon $f \neq 0$.)

Most újra az ellenség lép: mond egy $w \in B(a,\varepsilon)$ számot.

A $|z| = \delta$ körvonalon $|f| \geqslant \varepsilon > |w|$. A Rouché-tétel miatt a $B(0,\delta)$ körlapon az $f(z) - w$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint az $f(z)$ függvénynek, vagyis pontosan k darab.

Ha $w = 0$, akkor a $f(z) = w$ egyenlet egyetlen, k-szoros megoldása a 0.

Ha $w \neq 0$, akkor a 0 nem megoldás; a k darab megoldás a $\dot{B}(0,\delta)$ pontozott körlapon van.
Ott viszont $f' \neq 0$, tehát a k megoldás mindegyike egyszeres érték.

Tétel (A nyílt leképezés tétele)

Ha f holomorf és nem konstans a D tartományon, akkor D bármely nyílt részének képe nyílt.

Bizonyítás. Az kell, hogy bármely $b \in f(D)$ pont belső pontja a képhalmaznak.

Legyen $b = f(a)$, a b multiplicitása az a-ban k. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $B(b,\varepsilon)$ minden pontját legalább k-szor felveszi f.

Ezért biztosan $B(b,\varepsilon) \subset f(D)$; a b belső pontja $f(D)$-nek.

Tétel (a lokális inverz létezése)

Legyen f holomorf az a pontban. $f(a) = b$. Az $f(z)$ függvénynek akkor és csak akkor létezik holomorf $g(w)$ lokális inverze a b pont körül, amelyre $g(b) = a$, ha $f'(a) \neq 0$.

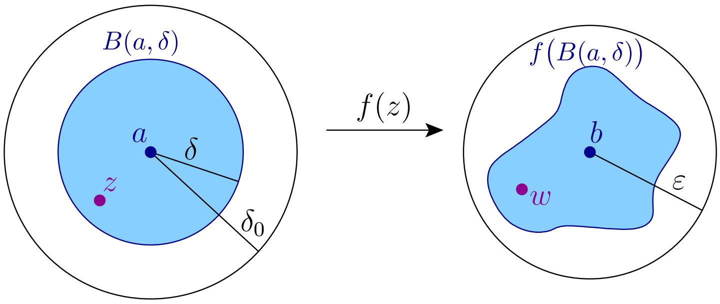
Bizonyítás. Legyen k a b multiplicitása az a pontban, és legyen δ_0 az a sugár, amelyet a lokális értékeloszlás tétele előír.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$ sugarat és a $B(a,\delta)$ körlapot. A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in \dot{B}(b,\varepsilon)$ értéket f pontosan k-szor vesz fel.

$\Rightarrow$ Ha $f'(a) = 0$, akkor $k \geqslant 2$. Tetszőlegesen kicsi $B(a,\delta)$ körlapon lesz k különböző pont, ahol f értéke megegyezik, tehát f nem lehet injektív az a pont semmilyen környezetében sem.

$\Leftarrow$ Ha $f'(a) \neq 0$, akkor $k = 1$.

A lokális értékeloszlás tétele miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely $w \in B(b,\varepsilon)$ értéket pontosan $k = 1$-szer vesz fel f a $B(a,\delta_0)$ körlapon.



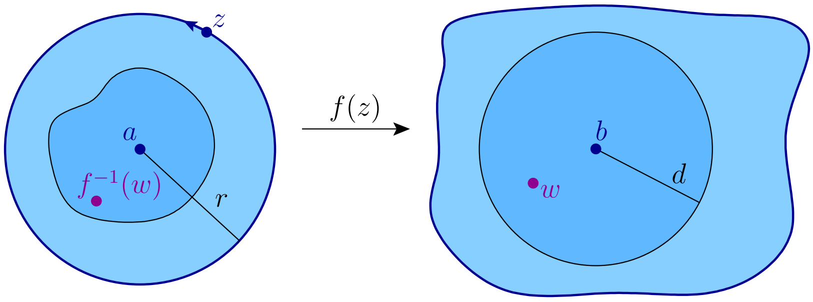
Az f folytonossága miatt van olyan $0 < \delta \leqslant \delta_0$, hogy $f\big(B(a,\delta)\big) \subset B(b,\varepsilon)$. Ezzel a választással bármely $z \in B(a,\delta)$ esetén a $w = f(z)$ számot a függvény pontosan egy helyen veszi fel a $B(a,\delta_0)$ körlapon, és ez a hely maga a z. Tehát, f injektív a $B(a,\delta)$ körlapon.

A nyílt leképezés tétele matt az $f\big(B(a,\delta)\big)$ halmaz nyílt, és az $f(z)$ úgy felelteti meg kölcsönösen egymásnak a $B(a,\delta)$ és a $f\big(B(a,\delta)\big)$ halmazokat, hogy nyílt halmazok képe nyílt, vagyis a lokális inverz $g = f^{-1}$ függvény is folytonos.

Az inverz függvény differenciálási szabálya szerint ha g lokális inverze f-nek, $f' \neq 0$ és g folytonos b-ben, akkor g differenciálható, és $g'(f(z)) = \dfrac{1}{f'(z)}$.

Alternatív bizonyítás az inverz függvény létezésére és differenciálhatóságára

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az a pontban, $f(a) = b$ és $f'(a) \neq 0$.



Az unicitástétel miatt elég kis $r > 0$ esetén az f csak egyszer veszi fel a b értéket a $B(a,r)$ halmazon. Legyen $d = \min_{|z-a|=r} |f(z) - b|$. A Rouché-tétel miatt bármely $w \in B(b,d)$ értéket az f pontosan egyszer vesz fel a $B(a,r)$ körben, és ez a hely az általánosított argumentumelv szerint

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \mathrm{d}z.$$

Ez a paraméteres integrál viszont differenciálható:

$$\Big(f^{-1}(w)\Big)' = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{\partial}{\partial w} \left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - w} \right) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{z \cdot f'(z)}{\big(f(z) - w\big)^2} \mathrm{d}z.$$

Példa (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel)

Tegyük fel, hogy $f(z,w)$ kétváltozós komplex függvény, folytonos az (a,b) egy környezetében, mindkét változó szerint holomorf, $f(a,b) = 0$ és $D_2 f(a,b) \neq 0$. Ekkor létezik az a pontnak olyan A környezete és a b pontnak olyan B környezete, hogy

(a) Bármely $z \in A$ ponthoz van egy egyértelmű $w = g(z) \in B$ pont, amelyre $f(z,w) = 0$;

(b) A $g : A \to B$ implicit függvény holomorf;

(c) $g'(z) = -\dfrac{D_1 f(z, g(z))}{D_2 f(z, g(z))}$.

Bizonyítás. (a) Válasszunk olyan kis $r > 0$ sugarat, hogy a $|w - b| \leqslant r$ zárt körlemezen $f(a,w)$ injektív. Legyen $m = \min_{|w-b| \leqslant r} |f(a,w)|$, $B = B(b,r)$, és A olyan kis környezete a-nak, hogy a $z \in A$, $|w - b| = r$ halmazon $|f(z,w) - f(a,w)| < m$.

Vizsgáljunk egy rögzített $z \in A$ pontot. A $|w - b| = r$ körvonalon $|f(z,w) - f(a,w)| < m \leqslant f(a,w)$. A Rouché-tétel szerint a $w \mapsto f(z,w)$ és a $w \mapsto f(a,w)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van. Mivel $f(a,w)$ injektív, egyetlen, egyszeres gyöke van, a b. Tehát, pontosan egy olyan $w \in B$ létezik, amelyre $f(z,w) = 0$.

(b) A $g(z)$ implicit függvényt az általánosított argumentumelv segítségével felírhatjuk integrál alakban. A $g(z)$ szám az $f(z,w) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása, egyben a megoldásainak összege a $|w - b| < r$ körben, vagyis

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-b|=r} w \cdot \frac{D_2 f(z,w)}{f(z,w)} \mathrm{d}w.$$

Azt a Young-tételnél láttuk, hogy $f(z,w)$ akárhányszor differenciálható, ezért ez a paraméteres integrál is holomorf.

(c) Ugyanaz, mint valósban: az $f(z, g(z)) = 0$ azonosságot deriváljuk:

$$D_1 f(z, g(z)) + D_2 f(z, g(z)) \cdot g'(z) = 0.$$